C106 – Primitives

Définition 1: Primitive d'une fonction

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f sur I, toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $\boxed{F' = f}$

Exemple 1: Recherche de primitive de $f(x) = 2x + 1$

- La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ est une primitive de f car $F'(x) = f(x)$.
- La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ est une primitive de f car $G'(x) = f(x)$.

Méthode 1: Montrer qu'une fonction F est une primitive de f

1. Dériver la fonction F.
2. Montrer que $F'(x) = f(x)$
3. Conclure

Exercice 1: Exercice d'application

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$ est une primitive de $f(x) = x^2$.
2. Montrer que la fonction G définie par $G(x) = \frac{-3}{x^2} + 2$ est une primitive de $g(x) = \frac{6}{x^3}$.
3. Montrer que la fonction H définie par $H(x) = 2\,\mathrm{e}^{-6x}$ est une primitive de $h(x) = -12\,\mathrm{e}^{-6x}$.

Propriété 1: Primitives usuelles

1. Fonctions Usuelles

Fonction $f(x)$	**Primitive** $F(x)$	**Validité**
a	$ax + k$	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x} + k$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$]0; +\infty[$
e^x	$e^x + k$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + k$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + k$	$\mathbb{R}$

2. Formes Composées

Forme de f	**Primitive** F
$u'u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + k$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u} + k$
$\dfrac{u'}{u^n} \ (n \geq 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}} + k$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert) + k$
$u'e^u$	$e^u + k$
$u'\cos(u)$	$\sin(u) + k$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u) + k$

Propriété 2: Non unicité des primitives

Soit f une foncton définie et continue sur un intervalle I

- Si F est une primtive de f alors f admet une **infinité** de primitives.
- Toute fonction G définie par $G(x) = F(x) + k$ est également une primitive de f. $(k \in \mathbb{R})$

Méthode 2: Recherche de toutes les primitives de f

1. trouver UNE primitive de f et la noter F
2. ajouter une constante $k \in \mathbb{R}$ pour trouver TOUTES les primitives de f et la noter G.

Exercice 2: Déterminer toutes les primitives des fonctions suivanes

1. $f(x) = 2x^3 + 3$
2. $f(x) = x^2 + 4x + 1$
3. $f(x) = 4\,\mathrm{e}^{2x}$

Propriété 3: Unicité de la primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux réels.
Il existe une **unique** primitive H de f vérifiant $H(a) = b$

Méthode 3: Déterminer LA primitive vérifiant une condition

1. Déterminer UNE primitive de la fonction f et la noter F. $F'(x) = f(x)$
2. Ajouter une constante k pour trouver TOUTES les primitive. $G(x) = F(x) + k$
3. Déterminer la valeur de la constante de manière à ce que $H(a) = F(a) + k = b$
4. Conclure en donnant l'expression de $H(x)$.

Exercice 3: Exercice d'application Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + 1 + \mathrm{e}^{-x}$
Déterminer la primitive H de f qui est telle que $H(0) = 4$.

Exercice 4: Déterminer la primitive H des fonctions suivantes qui respecte la condition donnée

- $f(x) = x^3 - 1$ et $H(3) = 0$
- $f(x) = \frac{2}{x}$ et $H(6) = 1$
- $f(x) = 2x(x^2+1)^2$ et $H(0) = 4$
- $f(x) = \mathrm{e}^{1-2x}$ et $H(0) = 2$