Nom:	Prénom:	Note:

Exercice 1 ▶

Contexte

On modélise le débit d'une connexion internet en Mbps (mégabits par secondes) en fonction de la distance x (en centaines de mètres) par la fonction:

$$f(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{-0.5x}$$

a et b sont deux réels à déterminer.

Conditions expérimentales:

- A la sortie du serveur ($x = 0$), le débit mesuré est de **8 Mbps**
- la tangente à la courbe représentative de la fonction f à l'origine a pour coefficient directeur -2

1. A l'aide de Géogébra et des conditions expérimentales, déterminer les valeurs des paramètres a et b et donner l'expression de la fonction f.

   $a = 2$ $\qquad b = 8 \qquad f(x) = (2x + 8)\,\mathrm{e}^{-0.5x}$

2. Montrer que la fonction dérivée de f peut s'écrire sous la forme $f'(x) = -(x + 2)\,\mathrm{e}^{-0.5x}$

   $f'(x) = (2x + 8) \times (-0.5)\,\mathrm{e}^{-0.5x} + 2\,\mathrm{e}^{-0.5x} = -x\,\mathrm{e}^{-0.5x} - 4\,\mathrm{e}^{-0.5x} + 2\,\mathrm{e}^{-0.5x} = -(x + 2)\,\mathrm{e}^{-0.5x}$

3. Déterminer le signe de la fonction dérivée f' sur $[0; +\infty[$ et compléter le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   $f'(x) = -(x + 2)\,\mathrm{e}^{-0.5x}$.

   Le signe de $f'(x)$ est donc le signe de $-(x+2)$ puisque $\mathrm{e}^{-0.5x}$ est toujours strictement positif. Ainsi, $f'(x)$ est positif sur $]-\infty; -2[$, nul en -2 et négatif sur $]-2; +\infty[$.
   Puisque la fonction f est définie sur $[0; +\infty[$, on en déduit que f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
signe $f'(x)$	$-$	
var f	8 ↘	0

4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

Or, $f(0) = (2 \times 0 + 8)\,\mathrm{e}^{-0.5\times 0} = 8$ et $f'(0) = -(0+2)\,\mathrm{e}^{-0.5\times 0} = -2$.
Ainsi, l'équation de la tangente est $y = -2x + 8$.

5. On considère que le débit de la connexion internet est considéré comme non acceptable si il est inférieur ou égal à 2 Mbps. Déterminer à partir de quelle distance le débit n'est plus acceptable et qu'il faudra alors envisager d'installer un répéteur. On arrondira cette distance au mètre près.

Avec Géogebra on trouve que la fonction devient inférieure à 2 Mbps à partir d'une distance de 421 mètres

Exercice 2 ▶

Reconstitution du volume de données transféré

On s'intéresse au volume total de données transféré sur une période donnée. On modèle le débit instantané (en Mbps) à l'instant t (en minutes) par:

$$p(t) = 3t\,\mathrm{e}^{-0.5t}$$

Un ingénieur propose que la fonction $G(t) = (-6t - 12)\,\mathrm{e}^{-0.5t}$ représente le volume total de données transféré (en Mo) depuis le début de la transmission jusqu'à l'instant t.

1. Vérifier que G est une primitive de la fonction p.

$G'(t) = (-6 - 0.5(-6t - 12))\,\mathrm{e}^{-0.5t} = (-6 + 3t + 6)\,\mathrm{e}^{-0.5t} = 3t\,\mathrm{e}^{-0.5t} = p(t)$
Donc, G est bien une primitive de p.

2. La transmission commence sans données transférées. Déterminer alors la primitive H de la fonction p vérifiant $H(0) = 0$.

$H(t) = G(t) + C$ où C est une constante à déterminer.
Or, $H(0) = G(0) + C = (-6 \times 0 - 12)\,\mathrm{e}^{-0.5\times 0} + C = -12 + C$.
Puisque $H(0) = 0$, on en déduit que $C = 12$.
Ainsi, $H(t) = (-6t - 12)\,\mathrm{e}^{-0.5t} + 12$.

3. Déterminer le volume total de données transféré au bout de 10 minutes, arrondir à l'unité près.

$H(10) = (-6 \times 10 - 12)\,\mathrm{e}^{-0.5\times 10} + 12 \approx 11$ Mo.
Donc, le volume total de données transféré au bout de 10 minutes est d'environ 11 Mo.