

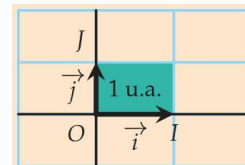
C107

INTÉGRATION

Définition 1 : Unité d'aire

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan. On note I et J les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.

L'**unité d'aire**, que l'on note u. a., est l'aire du rectangle dont O , I et J forment trois sommets.

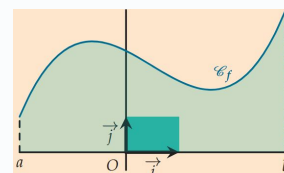
I. Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 1 : Notion d'intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

L'**intégrale** de a à b de f est l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine situé entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Cette aire se note $\int_a^b f(x) dx$ et se lit « intégrale de a à b de $f(x) dx$ ».

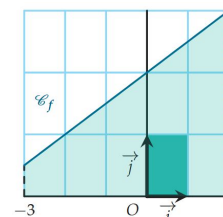


Remarque

- a et b sont les **bornes inférieure et supérieure** de l'intégrale. Par défaut $a \leq b$.
- x est une **variable muette**. On peut remplacer x par y , t ,...
- Pour toute fonction positive : $\int_a^a f(x) dx = 0$.
- Le symbole $\int$ (S allongé) est dû à G.W. Leibniz, rappelant qu'une aire est une somme d'aires élémentaires.

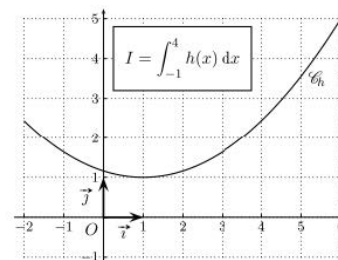
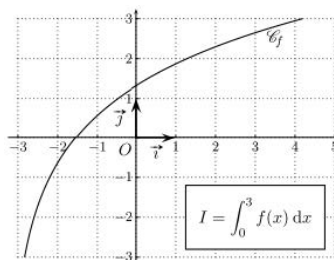
Exemple : Calcul d'aire

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{2} + 2$. On cherche à évaluer le domaine hachuré. Le domaine colorié est un trapèze dont l'aire est :
Les unités graphiques sont $OI = 0,6$ cm et $OJ = 0,8$ cm. Quelle est la valeur de l'aire coloriée?



Exercice 1 : Identification d'une aire à l'aide d'une intégrale

Dans chacune des situations, hachurer la partie du plan dont l'intégrale donne l'aire. Donner un encadrement le plus précis possible pour la valeur de cette intégrale en u. a.



Propriété 1 : Calcul d'une intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle, alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Méthode 1 : Calculer une intégrale

Pour calculer $\int_a^b f(x) dx$:

1. Identifier les bornes a et b .
2. S'assurer que f est continue sur $[a; b]$.
3. Déterminer une primitive F de f .
4. Calculer $F(b) - F(a)$.

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^1 x^2 dx$$

$$I_2 = \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

$$I_3 = \int_1^3 x(x^2 + 1)^2 dx$$

II. Intégration d'une fonction continue de signe quelconque**Propriété 1 : Cas des fonctions non positives**

Si la fonction f n'est pas positive sur tout l'intervalle $[a; b]$, alors on ne peut PLUS dire que $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire sous la courbe représentative de la fonction f .

Exemple : Calculer $\int_{-1}^2 (x^2 - 2) dx$ et conclure.

Propriété 2 : Propriétés de l'intégrale

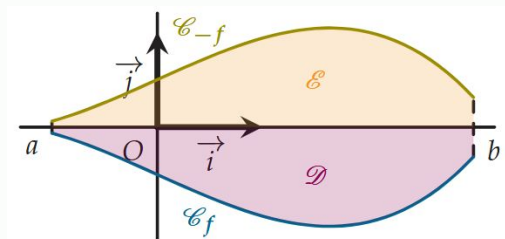
Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a; b]$:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad ; \quad \int_a^b (f+g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

Propriété 3 : Fonction négative et aire

Soit f une fonction continue est négative sur un intervalle $[a; b]$. Alors l'aire du domaine situé entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses sur $[a; b]$ est

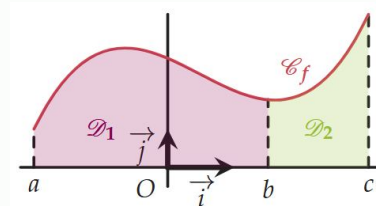
$$A_{\mathcal{D}} = A_{\mathcal{E}} = \int_a^b (-f(x)) dx = - \int_a^b f(x) dx$$



Propriété 4 : Relation de Chasles

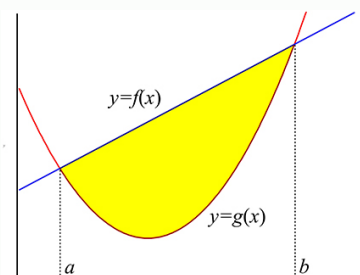
Soient a, b, c trois réels d'un intervalle I où f est continue :

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

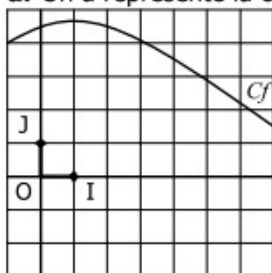
**III. Aire entre deux courbes****Propriété 1 : Aire entre deux courbes**

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b]$ telles que sur cet intervalle, $f(x) \geq g(x)$. Alors l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $[a; b]$ est donné par

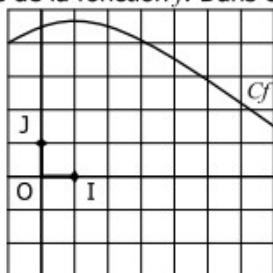
$$\int_a^b (f - g)(x) dx$$

**Exercice 3**

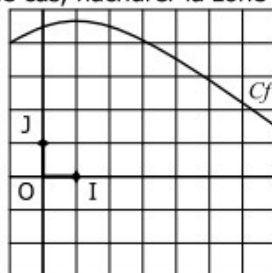
a. On a représenté la courbe de la fonction f . Dans chaque cas, hachurer la zone indiquée.



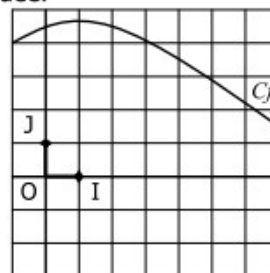
$$A = \int_2^5 f(x) dx$$



$$A = \int_3^6 f(x) dx$$

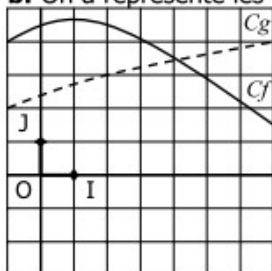


$$A = \int_1^5 f(x) - 2 dx$$

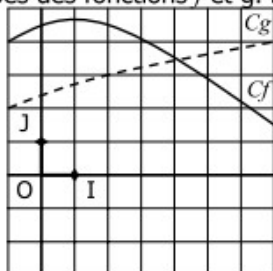


$$A = \int_0^3 f(x) - x dx$$

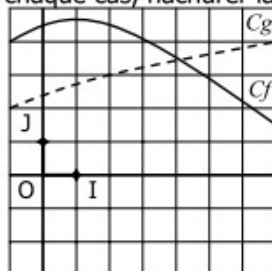
b. On a représenté les courbes des fonctions f et g . Dans chaque cas, hachurer la zone indiquée.



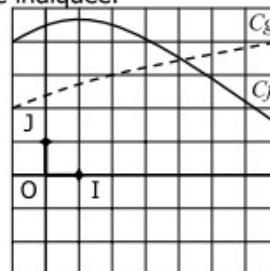
$$A = \int_1^3 g(x) dx$$



$$A = \int_0^4 f(x) - g(x) dx$$



$$A = \int_5^7 g(x) - f(x) dx$$

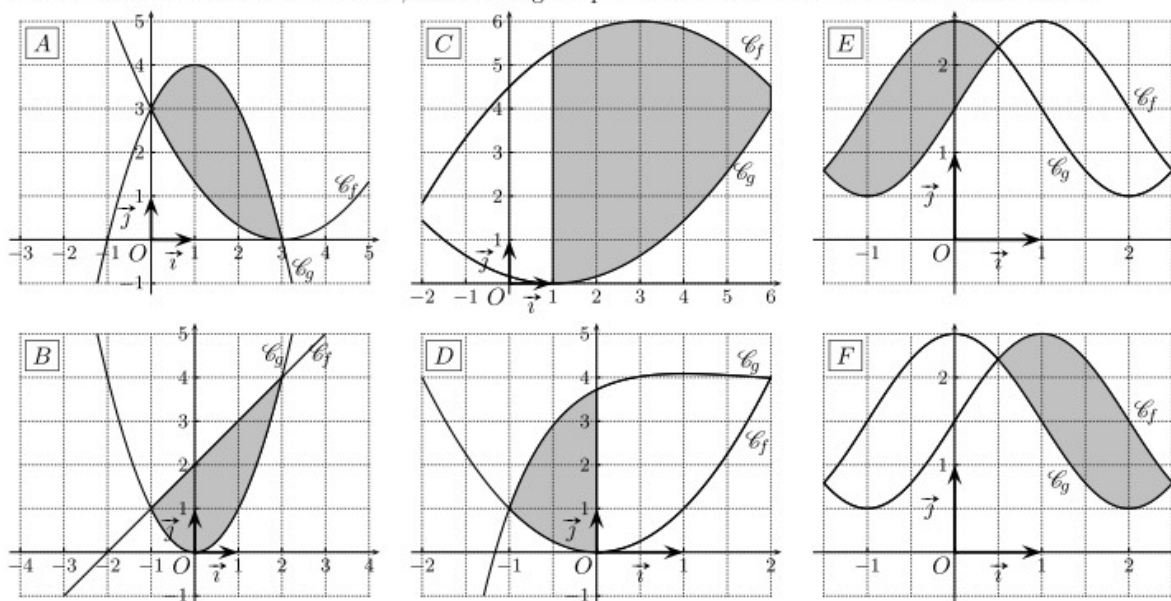


$$A = \int_0^3 g(x) - x dx$$

Exercice 4

EXERCICE 7

Dans chacune des situations suivantes, écrire l'intégrale permettant de calculer l'aire du domaine coloré.



IV. Valeur moyenne

Définition 1 : Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. La **valeur moyenne** de f sur $[a; b]$ est le nombre μ défini par :

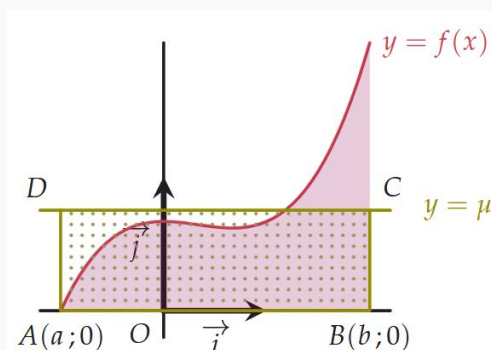
$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Remarque

Dans le cas où f est positive et continue sur $[a; b]$, la valeur moyenne de f entre a et b représente la hauteur du rectangle construit sur l'intervalle $[a; b]$.

L'aire du rectangle ABCD est égale, en u.a., à l'aire du domaine coloré car d'après la définition :

$$\mu \cdot (b-a) = \int_a^b f(t) dt$$



Exercice 5 : Calculer la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle considéré

1. $f(x) = 7x^2 - 2x + 4$ sur $[1; 3]$
2. $f(x) = x^3$ sur $[-3; 3]$
3. $f(x) = 2xe^{x^2}$ sur $[2; 3]$