

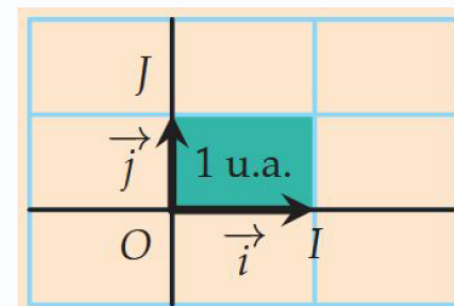
C107 – Intégration

Eléments de cours

Définition 1 : Unité d'aire

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan. On note I et J les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.

L'**unité d'aire**, que l'on note u.a., est l'aire du rectangle dont O , I et J forment trois sommets.



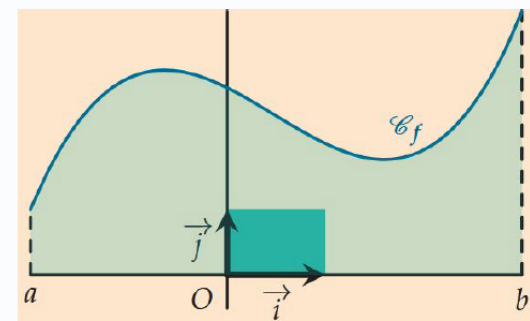
I. Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 1 : Notion d'intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

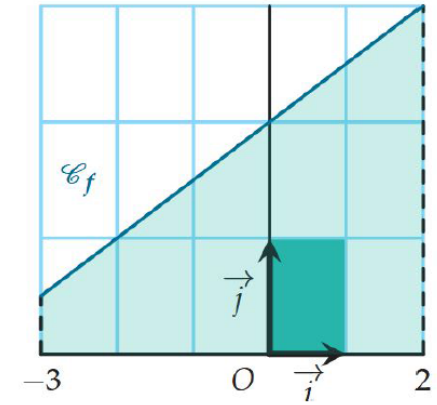
L'**intégrale** de a à b de f est l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine situé entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Cette aire se note $\int_a^b f(x) dx$ et se lit « intégrale de a à b de $f(x) dx$ ».



Exemple : Calcul d'aire

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{2} + 2$. On cherche à évaluer le domaine hachuré. Le domaine colorié est un trapèze dont l'aire est :
Les unités graphiques sont $OI = 0,6$ cm et $OJ = 0,8$ cm. Quelle est la valeur de l'aire coloriée?



La fonction f est bien continue et positive sur l'intervalle $[-3; 2]$

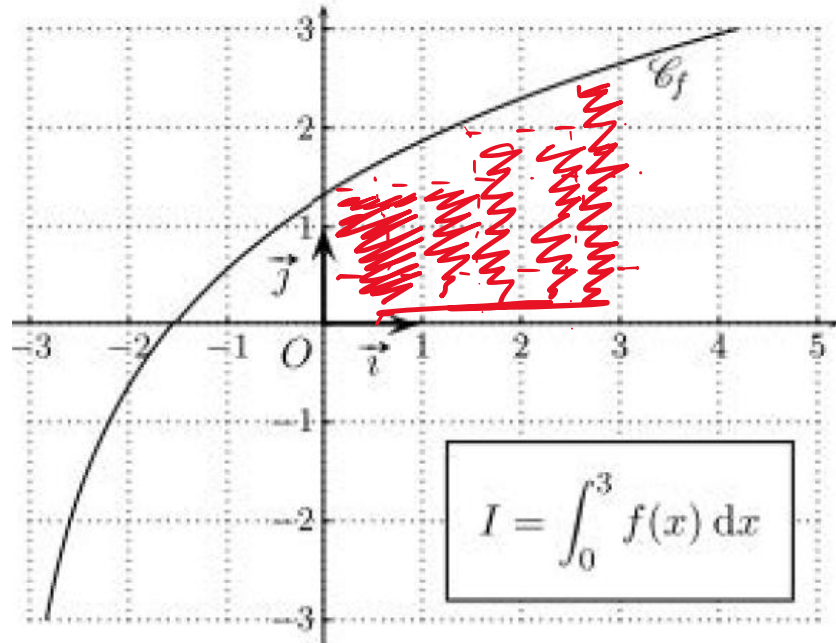
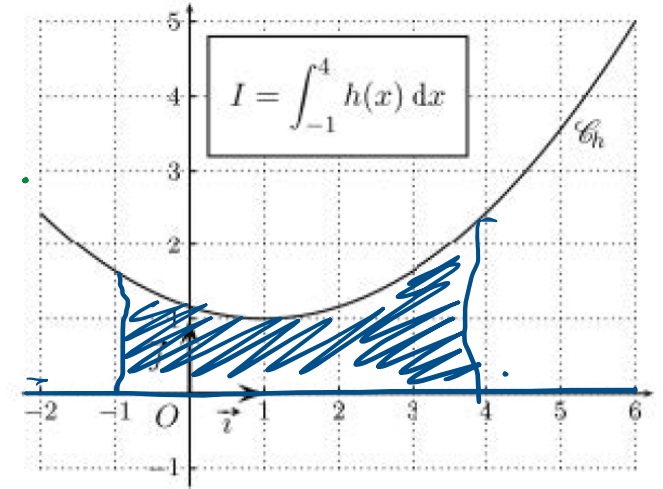
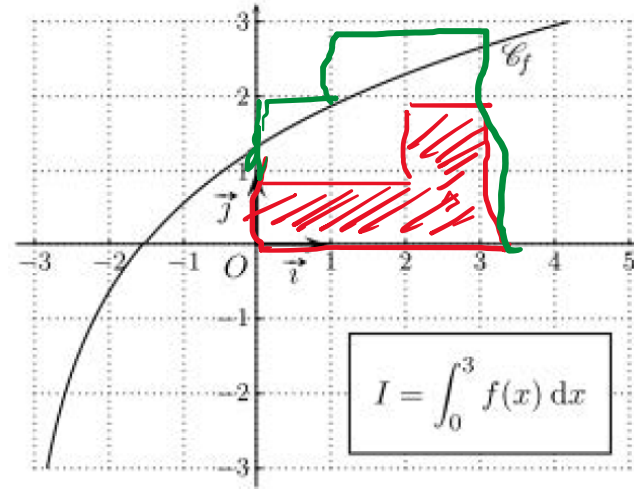
$$\text{On a donc } A = \int_{-3}^2 f(x) dx = \int_{-3}^2 \left(\frac{x}{2} + 2 \right) dx = 8,75 \text{ u.a}$$

$$\text{On a donc } 1 \text{ u. a} = 0,6 \times 0,8 = 0,48 \text{ cm}^2$$

$$\text{Donc } A = 8,75 \times 0,48 \text{ cm}^2$$

✎ Exercice 1 : Identification d'une aire à l'aide d'une intégrale

Dans chacune des situations, hachurer la partie du plan dont l'intégrale donne l'aire. Donner un encadrement le plus précis possible pour la valeur de cette intégrale en u . a .

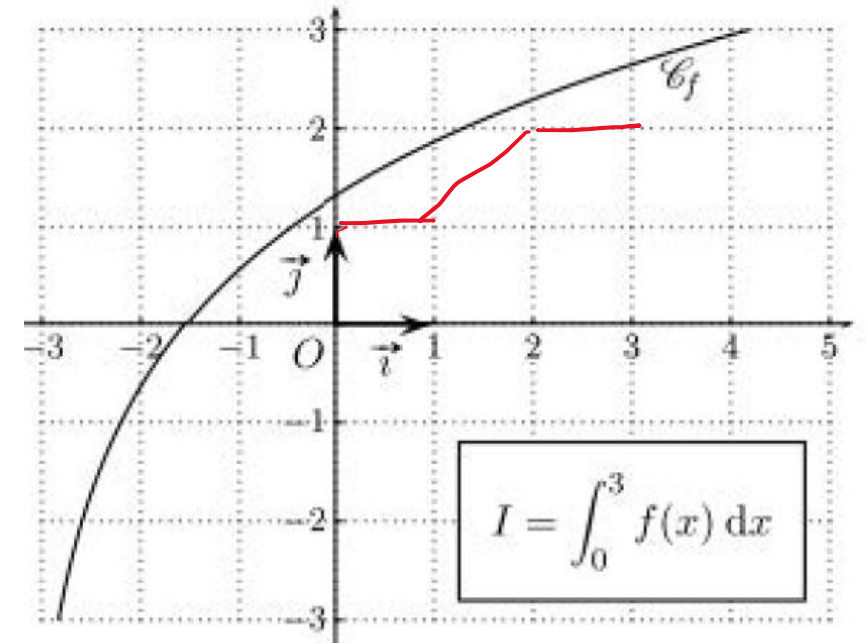


$$4 < I < 8$$

$$22 < I$$

$$22 \times 0,25 < I$$

$$5,5 < I$$



Propriété 1 : Calcul d'une intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle, alors :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Méthode 1 : Calculer une intégrale

Pour calculer $\int_a^b f(x) \, dx$:

1. Identifier les bornes a et b .
2. S'assurer que f est continue sur $[a; b]$.
3. Déterminer une primitive F de f .
4. Calculer $F(b) - F(a)$.

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^1 x^2 dx$$

$$I_2 = \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

$$I_3 = \int_1^3 x(x^2 + 1)^2 dx$$

$$f(x) = x^2$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$I_1 = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$I_1 = \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$F(x) = \ln(x)$$

$$I_2 = \int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^e$$

$$I_2 = (\ln(e) - \ln(1)) = 1$$

Saisie: `Intégrale(f, 0, 1)`

