

Nom:

Prénom:

Note:

PARTIE A : Mise en place de la fonction à étudier

L'objectif de cette partie est l'étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -0,5x^2 + 2x + 1$$

1. À l'aide de Géogebra, tracer la courbe représentative de la fonction f .
2. Créer deux curseurs a et b entre 0 et 5 avec un pas de 0,1 et donner les valeurs suivantes : $a = 1$ et $b = 4$.

Partie B : Somme de Riemann (Approximation)

On souhaite diviser l'intervalle $[a; b]$ en n sous-intervalles de même longueur.

1. Créer un curseur n compris entre 1 et 100 avec un pas de 1.
2. Saisissez la commande $S_{\text{inf}} = \text{SommeInférieure}(f, a, b, n)$. Changer sa couleur.
3. Saisissez la commande $S_{\text{sup}} = \text{SommeSupérieure}(f, a, b, n)$. Changer sa couleur.
4. Observer les valeurs de S_{inf} et S_{sup} pour différentes valeurs de n .
5. Que peut-on conjecturer sur la valeur de l'aire sous la courbe de f entre a et b lorsque n tend vers l'infini?

Lorsque n tend vers l'infini, les sommes de Riemann S_{inf} et S_{sup} convergent vers la même valeur, qui correspond à l'aire sous la courbe de la fonction f entre les points a et b . On peut conjecturer que cette aire est égale à la limite de ces sommes lorsque n tend vers l'infini.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{inf}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{\text{sup}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \text{Aire sous la courbe de } f \text{ entre } a \text{ et } b$$

Partie C : Calcul de l'aire sous la courbe à l'aide de primitives

1. Déterminer une primitive F de la fonction f .

$$F(x) = -0,5 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 1 \cdot x + C = -\frac{x^3}{6} + x^2 + x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

2. Calculer $F(b) - F(a)$ et interpréter ce résultat.

En calculant $F(b) - F(a)$, on obtient la valeur de l'aire sous la courbe de la fonction f entre les points a et b .

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx = \int_1^4 f(x) dx = F(4) - F(1) = \frac{28}{3} - \frac{11}{6} = \frac{56 - 11}{6} = \frac{45}{6} = \frac{15}{2} = 7,5 \quad \text{u.a}$$

3. Dans Géogebra, saisir la commande $\text{Aire} = \text{Intégrale}(f, a, b)$. Comparer la valeur de $F(b) - F(a)$ avec celle de l'aire calculée dans Géogebra.

La valeur de $F(b) - F(a)$ est égale à l'aire calculée dans Géogebra, ce qui confirme que le calcul de l'aire sous la courbe de la fonction f entre les points a et b est correct.

4. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ et interpréter ce résultat.

La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ est donnée par la formule :

$$\mu_{[a;b]} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{4-1} \cdot \frac{15}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Cette valeur correspond à la hauteur du rectangle dont l'aire est égale à l'aire sous la courbe de f entre a et b .

5. Créer avec Géogébra le rectangle $ABCD$ tel que AB soit égal à la valeur moyenne de f sur $[a; b]$ et que AD soit égal à $b - a$. Vérifier que l'aire de ce rectangle est égale à l'aire sous la courbe de f entre a et b .

En créant le rectangle $ABCD$ avec AB égal à la valeur moyenne de f sur $[a; b]$ (soit 2,5) et AD égal à $b - a$ (soit 3), on obtient un rectangle dont l'aire est donnée par :

$$\text{Aire}_{ABCD} = AB \cdot AD = 2,5 \cdot 3 = 7,5$$

Cette aire est égale à l'aire sous la courbe de f entre les points a et b , confirmant ainsi que le rectangle $ABCD$ a la même aire que celle sous la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$.