

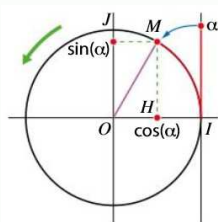
C112

NOMBRES COMPLEXES

Propriété 1

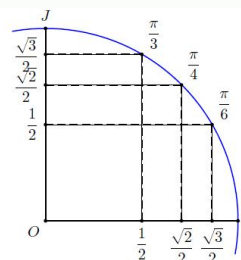
On considère un point $M(x; y)$ et $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$

$$\begin{aligned} \bullet \cos \alpha &= \frac{OH}{OM} \\ \bullet \sin \alpha &= \frac{HM}{OM} \end{aligned}$$



valeur de α en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

On remarque la symétrie du tableau. Pour mémoriser ce tableau il suffit donc de se souvenir des 5 valeurs particulières présentes.

I. Approche algébrique : L'unité i

Définition 1 : Nombre complexe – forme algébrique

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ tel que :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$ et un élément i tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe s'écrit $z = a + ib$ ($a = \text{Re}(z)$, $b = \text{Im}(z)$).

✎ Exercice 1 : Calculer et simplifier pour mettre sous la forme $a + ib$:

- $A = (3 + 5i) - (2 - 4i) = \dots\dots\dots$
- $B = (1 + 2i)(3 - 4i) = \dots\dots\dots$
- $B = i(3 - 4i) = \dots\dots\dots$
- $C = (1 + i)^2 = \dots\dots\dots$

✎ Exercice 2 : Calcul de i^n

- Calculer les valeurs de $i^2, i^3, i^4, i^5 \dots$
- placer un curseur n allant de -10 à 10 par pas de 1
- dans la partie calcul formel, taper i^n . (Attention le i complexe se forme en appuyant sur ALT + i)
- faire varier i et observer ce qu'il se passe dans la partie graphique

✎ Exercice 3 : Calculs complexes avec Géogébra

Par défaut Géogébra cherche à convertir les nombres complexes sous forme algébrique. Tester le calcul formel et créant les nombres complexes suivants et observez la partie graphique.

$$z_1 = (3 + 4i) \times (4 - i)$$

$$z_2 = \frac{1 - 3i}{4 - i}$$

$$z_3 = (1 - i)^6$$

Propriété 1 : Le nombre complexe conjugué

Le conjugué de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$.

Méthode 1 : Méthode de la quantité conjuguée

Pour calculer un quotient $\frac{z_1}{z_2}$, on multiplie le haut et le bas par $\bar{z}_2$.

Exercice 4 : Application

- Déterminer le nombre conjugué de $z = 4 - 3i$
- Ecrire sous forme algébrique le nombre $\frac{3-i}{4-3i}$
- Vérifier avec Géogébra

II. Approche géométrique

Propriété 1 : Nombres complexes et géométrie

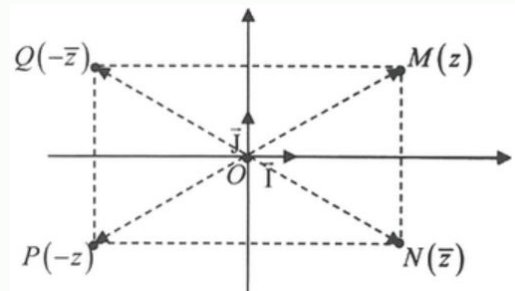
Au point $M(a; b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$.

On dit que $z = a + ib$ est l'**affixe** du point M . On note

$$M(a + ib)$$

Soient A et B les points d'affixes respectifs z_A et z_B .

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{AB} = z_B - z_A$
- Le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$



Exercice 5 : Nombres complexes et géométrie

- Sur Géogébra, placez le point A d'affixe $z_A = 1 + 2i$
- Placez le point B d'affixe $\overline{z_A}$ et le point C d'affixe $-z_A$.
- Quelle symétrie permet de passer de A à B ? De A à C ?

III. Résolutions d'équations

Propriété 1 : Résolution d'équations du premier degré dans $\mathbb{C}$

Les résolutions respectent exactement le même protocole que dans $\mathbb{R}$:

1. Faire passer dans le membre de gauche tout ce qui dépend de z et dans le membre de droite tout ce qui ne dépend pas de z .
2. Simplifier le membre de gauche et de droite
3. Isoler z et répondre à la question

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $3z - 6 = 4i + z + 2$

Propriété 2 : Résolution d'équations du deuxième degré dans $\mathbb{C}$

1. Mettre l'équation sous la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec (a, b, c) trois réels.
2. Calculer le **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta \geq 0$ alors il existe deux solutions réelles (éventuellement égales). Si $\Delta < 0$ alors il existe deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

IV. Formes trigonométrique et exponentielle

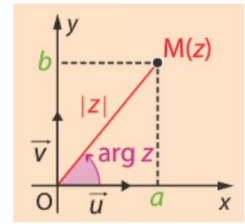
Définition 1 : Module et argument d'un nombre complexe

Le **module** d'un nombre complexe $z = a + ib$ est le réel positif

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Un **argument** de z , noté $\arg(z)$ est une mesure exprimée en radian de l'angle

$$\theta = \arg(z) = (\vec{u}, \vec{OM})$$



Définition 2 : Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Tout nombre complexe peut s'écrire sous la **forme trigonométrique** : $z = |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$ avec :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \cos \theta = \frac{a}{|z|} \quad \sin \theta = \frac{b}{|z|}$$

Méthode 1 : Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique

On considère un nombre complexe z écrit sous forme algébrique $z = a + ib$

1. Calculer $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
2. Calculer $\cos \theta$ et $\sin \theta$ et trouver la valeur de θ respectant les deux conditions précédentes.
3. Ecrire $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$

Exercice 7 : Ecrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométriques

$$1. z = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \times \frac{1}{2}$$

$$2. z = -2 + 2i$$

$$3. z = 1 + i\sqrt{3}$$

Méthode 2 : Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique

On considère un nombre complexe z tel que l'on connaît $|z|$ et un argument $\theta = \arg(z)$.

1. Calculer $a = |z| \cos \theta$
2. Calculer $b = |z| \sin \theta$
3. Ecrire $z = |z| \cos \theta + i |z| \sin \theta$

Exercice 8 : Ecrire les nombres complexes suivants sous forme arithmétique

$$1. |z| = 2 \text{ et } \arg(z) = -\frac{\pi}{3}$$

$$2. |z| = \frac{1}{2} \text{ et } \arg(z) = \frac{5\pi}{6}$$

$$3. |z| = 3 \text{ et } \arg(z) = \frac{2\pi}{3}$$

Propriété 1 : Notation exponentielle (Euler)

On écrit : $z = r e^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Propriété 2 : Propriétés de la forme exponentielle

$$1. e^{i \times 0} = 1$$

$$2. e^{i \frac{\pi}{2}} = i$$

$$3. e^{i\pi} = -1$$

$$4. e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$5. \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$6. \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$7. (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Exercice 9 : Impédances complexes

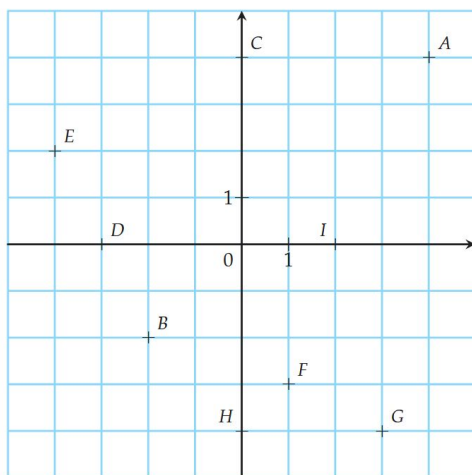
En électronique, on utilise les nombres complexes pour modéliser les composants :

- Résistance : $Z_R = R$
- Bobine : $Z_L = iL\omega$

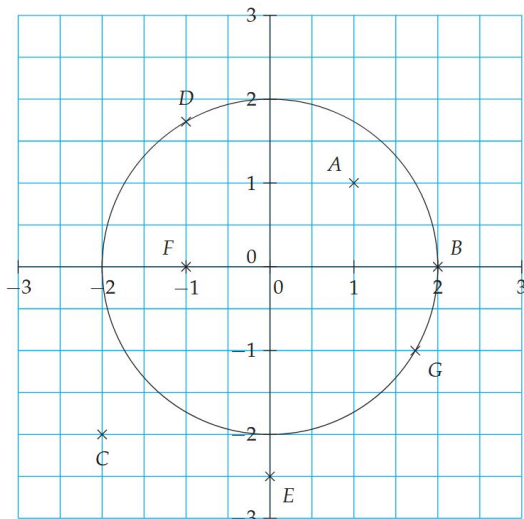
Calculer l'impédance totale $Z = Z_R + Z_L$ sous forme exponentielle pour $R = 10\Omega$ et $L\omega = 10\Omega$.

V. Exercices

- 4** Déterminer les affixes des points repérés ci-dessous.



- 5** Sur le graphique suivant, on a représenté des points et le cercle de centre l'origine et de rayon 2. Donner le module et un argument de leurs affixes.



- 8** Calculer les sommes suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

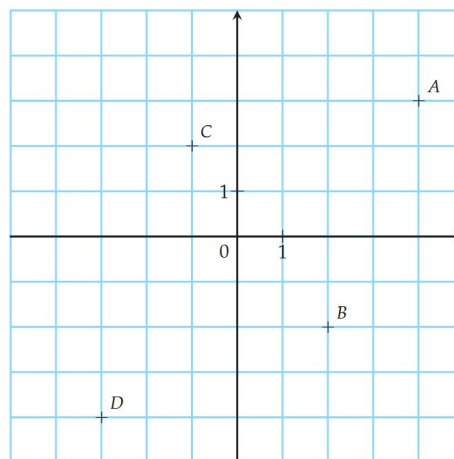
- 1) $(2 - 4i) + (2 - 3i)$ 3) $(3 + 3i) + (1 - i)$
 2) $(1 - 5i) + (2 + i)$ 4) $\left(2 + \frac{1}{3}i\right) + \left(-3 + \frac{4}{3}i\right)$

- 11** ► **MÉTHODE 1** p. 232

Calculer les expressions suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

- 1) $2(1 + 2i)$ 3) $2i(3 - 2i)$
 2) $i(3 + i)$ 4) $(1 + 2i)(-2 - 2i)$

20



Sans effectuer de calculs

- 1) Lire l'affixe z_A du point A.
- 2) Construire le point dont l'affixe est $\bar{z}_A$.
- 3) Construire le point dont l'affixe est $-z_A$.
- 4) Construire le point dont l'affixe est $z_A + 2$.
- 5) Construire le point dont l'affixe est $z_A - i$.
- 6) Mêmes questions pour les points B, C et D

- 32** Calculer les conjugués des nombres complexes suivants :

- 1) $7 - \left(3 + \frac{5}{3}i\right)$ 3) $\frac{3}{2} + 3i + (1 - i)$
 2) $(3 - 5i) + \sqrt{2}$ 4) $(5 - i)(\sqrt{2} + 3i)$

- 45** ► **MÉTHODE 3** p. 237

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

- 1) $(1 + i)z = 1 - i$ 3) $(2z + 1 - i)(iz + 3) = 0$
 2) $\frac{z + 1}{z - 1} = 2i$ 4) $\frac{iz + 1}{z - 3i} = 2 + i$

- 51** ► **MÉTHODE 4** p. 239

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- 1) $z^2 - 3z = 0$ 3) $z^2 + z + 1 = 0$
 2) $4z^2 - 4z + 5 = 0$ 4) $-2z^2 + 6z + 5 = 0$

- 81** Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

- 1) $-2 + 2i$ 5) $3i$
 2) $1 - i$ 6) 3
 3) $-3 - 3i$ 7) $-i$
 4) $\sqrt{3} + i$ 8) $2 + 2i\sqrt{3}$