

Nom:

Prénom:

Note:

Contexte général

Une start-up conçoit un système de capteurs connectés pour surveiller la température dans des serveurs informatiques. Le TP porte sur l'analyse de la réponse d'un capteur (Partie 1), la gestion des alertes stockées en base de données (Partie 2) et la fiabilité des composants reçus par les fournisseurs (Partie 3).

Partie A : Analyse du système thermique

Lorsqu'un serveur s'allume, la température T (en °C) captée par la sonde en fonction du temps t (en secondes) est modélisée sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(t) = 60 - 40e^{-0,2t} \quad \text{pour } t \geq 0$$

1. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de la surveillance de la température.

2. Calculer $f'(t)$.

3. Étudier le signe de $f'(t)$ et en déduire les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$. Vous présenterez les résultats dans un tableau.

4. On considère que le système est stabilisé lorsque la température atteint 55°C.

À l'aide de GeoGebra, déterminer graphiquement au bout de combien de temps (arrondi à l'unité) cette température est atteinte.



Appeler le professeur pour expliquer votre démarche même si celle-ci est inaboutie.

Partie B : Gestion d'une pile de messages (Buffer)

Le système de surveillance génère des logs. Initialement, il y a **50 messages** en attente.

Chaque minute :

- Le système traite et supprime 20% des messages présents.
- 30 nouveaux messages sont générés par les capteurs.

On note u_n le nombre de messages à la minute n . On a $u_0 = 50$.

5. Justifier que $u_{n+1} = 0,8u_n + 30$.

6. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 150$ est une suite géométrique dont on déterminera les paramètres.

7. En déduire que $u_n = -100 \cdot 0,8^n + 150$.

8. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de la gestion des messages.

9. On souhaite savoir quand la pile dépassera 140 messages en attente. Compléter l'algorithme suivant pour trouver la minute à laquelle cela se produit.

```

n <- .....
u <- .....
Tant que ..... faire
    u <- .....
    n <- .....
Fin Tant que
Afficher n

```

Partie C : Contrôle de fiabilité des capteurs

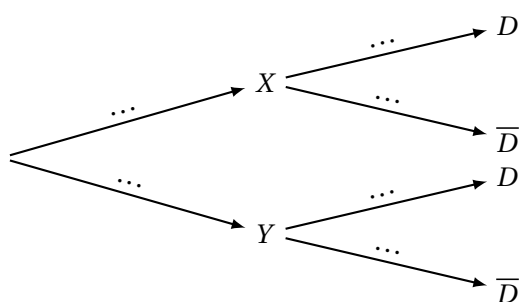
L'entreprise reçoit des capteurs de deux fournisseurs différents. Chaque capteur peut être défectueux ou non.

- Fournisseur X : fournit 70% du stock (avec un taux de défectueux de 2%).
- Fournisseur Y : fournit 30% du stock (avec un taux de défectueux de 5%).

On tire un capteur au hasard dans le stock global. Soient les événements :

- X : « Le capteur provient du fournisseur X »
- Y : « Le capteur provient du fournisseur Y »
- D : « Le capteur est défectueux »

10. Construire un arbre pondéré modélisant cette situation.



11. Calculer la probabilité que le capteur prélevé soit défectueux $P(D)$.

12. Le capteur tiré est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne du fournisseur Y. On arrondira le résultat à 10^{-3} .

Partie D : Loi binomiale

On prélève désormais, de manière indépendante, un lot de **50 capteurs**. On considère que la probabilité qu'un capteur soit défectueux est $p = 0,029$ (valeur arrondie). Soit Z la variable aléatoire comptant le nombre de capteurs défectueux dans ce lot.

13. Justifier que Z suit une loi binomiale et préciser ses paramètres n et p .

14. Déterminer la probabilité d'avoir exactement 2 capteurs défectueux dans le lot : $P(Z = 2)$.

15. Déterminer la probabilité d'avoir entre 2 et 4 capteurs défectueux dans le lot : $P(2 \leq Z \leq 4)$.

16. Calculer la probabilité d'avoir au moins 1 capteur défectueux : $P(Z \geq 1)$.

Partie E : Détermination d'une taille d'échantillon

Le responsable qualité souhaite que la probabilité de détecter au moins un capteur défectueux dans un lot de n capteurs soit supérieure à 0,95. On rappelle que la probabilité qu'un capteur soit défectueux est $p = 0,029$.

17. Montrer que la condition $P(Z \geq 1) > 0,95$ est équivalente à l'inéquation : $(0,971)^n < 0,05$.

18. Déterminer le nombre minimal n de capteurs que le responsable doit prélever pour respecter cette exigence.



Appeler le professeur pour expliquer votre démarche même si celle-ci est inaboutie.