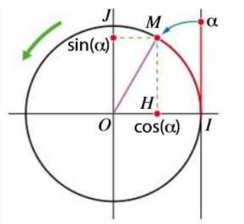
C112 NOMBRES COMPLEXES

Propriété 1

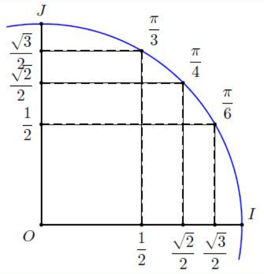
On considère un point $M(x;y)$ et $\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$

- $\cos\alpha = \dfrac{OH}{OM}$
- $\sin\alpha = \dfrac{HM}{OM}$



valeur de α en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

On remarque la symétrie du tableau. Pour mémoriser ce tableau il suffit donc de se souvenir des 5 valeurs particulières présentes.



I. Approche algébrique : L'unité i

Définition 1 : Nombre complexe – forme algébrique

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ tel que :

1. $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$ et un élément i tel que $\boxed{\mathrm{i}^2 = -1}$.
2. Tout nombre complexe s'écrit $\boxed{z = a + ib}$ $(a = \mathrm{Re}(z),\ b = \mathrm{Im}(z))$.

Exercice 1 : Calculer et simplifier pour mettre sous la forme $a + ib$:

- $A = (3+5\mathrm{i}) - (2-4\mathrm{i}) =$ ....
- $B = (1+2\mathrm{i})(3-4\mathrm{i}) =$ ....
- $B = \mathrm{i}(3-4\mathrm{i}) =$ ....
- $C = (1+\mathrm{i})^2 =$ ....

Exercice 2 : Calcul de i^n

- Calculer les valeurs de i^2, i^3, i^4, i^5 et i...
- placer un curseur n allant de -10 à 10 par pas de 1
- dans la partie calcul formel, taper i^n. (Attention le i complexe se forme en appuyant sur `ALT` + `ii`)
- faire varier n et observer ce qu'il se passe dans la partie graphique

Exercice 3 : Calculs complexes avec Géogébra

Par défaut Géogébra cherche à convertir les nombres complexes sous forme algébrique. Tester le calcul formel et créant les nombres complexes suivants et observez la partie graphique.

$z_1 = (3+4\mathrm{i}) \times (4-\mathrm{i})$ $\qquad z_2 = \dfrac{1-3\mathrm{i}}{4-\mathrm{i}}$ $\qquad z_3 = (1-\mathrm{i})^6$

Propriété 1 : Le nombre complexe conjugué

Le conjugué de $z = a + ib$ est $\boxed{\overline{z} = a - ib}$.

Méthode 1 : Méthode de la quantité conjuguée

Pour calculer un quotient $\frac{z_1}{z_2}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\overline{z_2}$.

Exercice 4 : Application

- Déterminer le nombre conjugué de $z = 4 - 3\mathrm{i}$
- Ecrire sous forme algébrique le nombre $\frac{3 - \mathrm{i}}{4 - 3\mathrm{i}}$
- Vérifier avec Géogébra

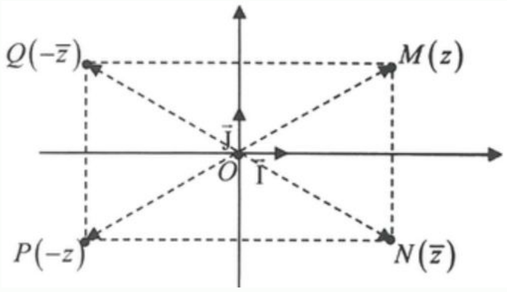
II. Approche géométrique

Propriété 1 : Nombres complexes et géométrie

Au point $M(a; b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$.

On dit que $z = a + ib$ est l'**affixe** du point M. On note

$$\boxed{M(a + ib)}$$



Soient A et B les points d'affixes respectifs z_A et z_B.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $\boxed{z_{AB} = z_B - z_A}$
- Le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $\boxed{z_I = \frac{z_A + z_B}{2}}$

Exercice 5 : Nombres complexes et géométrie

- Sur Géogébra, placez le point A d'affixe $z_A = 1 + 2\mathrm{i}$
- Placez le point B d'affixe $\overline{z_A}$ et le point C d'affixe $-z_A$.
- Quelle symétrie permet de passer de A à B ? De A à C ?

III. Résolutions d'équations

Propriété 1 : Résolution d'équations du premier degré dans $\mathbb{C}$

Les résolutions respectent exactement le même protocole que dans $\mathbb{R}$:

1. Faire passer dans le membre de gauche tout ce qui dépend de z et dans le membre de droite tout ce qui ne dépend pas de z.
2. Simplifier le membre de gauche et de droite
3. Isoler z et répondre à la question

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $3z - 6 = 4i + z + 2$

Propriété 2 : Résolution d'équations du deuxième degré dans $\mathbb{C}$

1. Mettre l'équation sous la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec (a, b, c) trois réels.
2. Calculer le **discriminant** $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

Si $\Delta \geq 0$ alors il existe deux solutions réelles (éventuellement égales).

$$\boxed{z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Si $\Delta < 0$ alors il existe deux solutions complexes conjuguées :

$$\boxed{z_1 = \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}}$$

IV. Formes trigonométrique et exponentielle

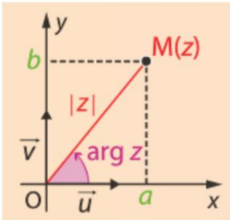
Définition 1 : Module et argument d'un nombre complexe

Le **module** d'un nombre complexe $z = a + ib$ est le réel positif

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

Un **argument** de z, noté $\arg(z)$ est une mesure exprimée en radian de l'angle

$$\boxed{\theta = \arg(z) = (\vec{u}, \vec{OM})}$$



Définition 2 : Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Tout nombre complexe peut s'écrire sous la **forme trigonométrique** : $\boxed{z = |z| \cdot \left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)}$

avec :

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{|z|} \qquad \sin\theta = \frac{b}{|z|}}$$

Méthode 1 : Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique

On considère un nombre complexe z écrit sous forme algébrique $z = a + ib$

1. Calculer $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$
2. Calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ et trouver la valeur de θ respectant les deux conditions précédentes.
3. Ecrire $z = |z|\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)$

Exercice 7 : Ecrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométriques

1. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i} \times \frac{1}{2}$
2. $z = -2 + 2\mathrm{i}$
3. $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

Méthode 2 : Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique

On considère un nombre complexe z tel que l'on connait $|z|$ et un argument $\theta = \arg(z)$.

1. Calculer $a = |z|\cos\theta$
2. Calculer $b = |z|\sin\theta$
3. Ecrire $z = |z|\cos\theta + \mathrm{i}|z|\sin\theta$

Exercice 8 : Ecrire les nombres complexes suivants sous forme arithmétique

1. $|z| = 2$ et $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{3}$
2. $|z| = \dfrac{1}{2}$ et $\arg(z) = \dfrac{5\pi}{6}$
3. $|z| = 3$ et $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$

Propriété 1 : Notation exponentielle (Euler)

On écrit : $\boxed{z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Propriété 2 : Propriétés de la forme exponentielle

1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0} = 1$
2. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 0$
3. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$
4. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$
5. $\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$
6. $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$
7. $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$

Exercice 9 : Impédances complexes

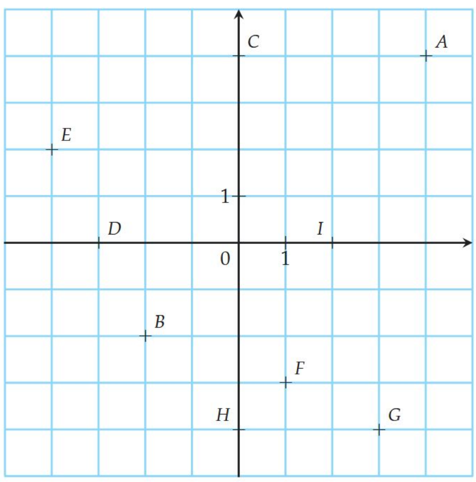
En électronique, on utilise les nombres complexes pour modéliser les composants :

- Résistance : $Z_R = R$
- Bobine : $Z_L = \mathrm{i}L\omega$

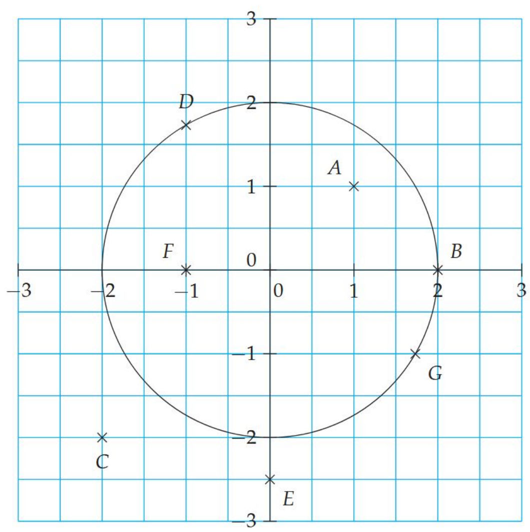
Calculer l'impédance totale $Z = Z_R + Z_L$ sous forme exponentielle pour $R = 10\Omega$ et $L\omega = 10\Omega$.

V. Exercices

4 Déterminer les affixes des points repérés ci-dessous.



5 Sur le graphique suivant, on a représenté des points et le cercle de centre l'origine et de rayon 2. Donner le module et un argument de leurs affixes.



8 Calculer les sommes suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

1) $(2-4\mathrm{i})+(2-3\mathrm{i})$

2) $(1-5\mathrm{i})+(2+\mathrm{i})$

3) $(3+3\mathrm{i})+(1-\mathrm{i})$

4) $\left(2+\frac{1}{3}\mathrm{i}\right)+\left(-3+\frac{4}{3}\mathrm{i}\right)$

11 ► MÉTHODE 1 p. 232

Calculer les expressions suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

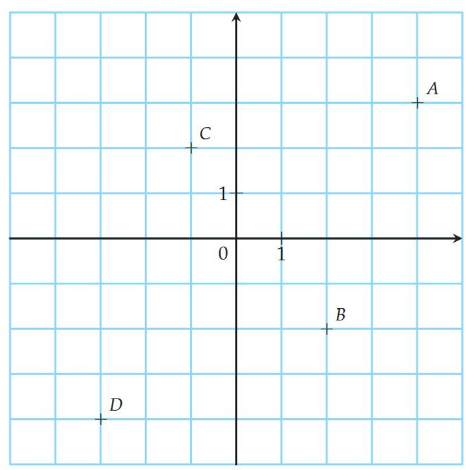
1) $2(1+2\mathrm{i})$

2) $\mathrm{i}(3+\mathrm{i})$

3) $2\mathrm{i}(3-2\mathrm{i})$

4) $(1+2\mathrm{i})(-2-2\mathrm{i})$

20



Sans effectuer de calculs

1) Lire l'affixe z_A du point A.

2) Construire le point dont l'affixe est $\bar{z}_A$.

3) Construire le point dont l'affixe est $-z_A$.

4) Construire le point dont l'affixe est $z_A + 2$.

5) Construire le point dont l'affixe est $z_A - \mathrm{i}$.

6) Mêmes questions pour les points B, C et D

32 Calculer les conjugués des nombres complexes suivants :

1) $7-\left(3+\frac{5}{3}\mathrm{i}\right)$

2) $(3-5\mathrm{i})+\sqrt{2}$

3) $\frac{3}{2}+3\mathrm{i}+(1-\mathrm{i})$

4) $(5-\mathrm{i})\left(\sqrt{2}+3\mathrm{i}\right)$

45 ► **MÉTHODE 3** p. 237

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

1) $(1+\mathrm{i})z=1-\mathrm{i}$.

2) $\frac{z+1}{z-1}=2\mathrm{i}$.

3) $(2z+1-\mathrm{i})(\mathrm{i}z+3)=0$.

4) $\frac{\mathrm{i}z+1}{z-3\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}$

51 ► **MÉTHODE 4** p. 239

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2-3z=0$

2) $4z^2-4z+5=0$

3) $z^2+z+1=0$

4) $-2z^2+6z+5=0$

81 Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

1) $-2+2\mathrm{i}$

2) $1-\mathrm{i}$

3) $-3-3\mathrm{i}$

4) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$

5) $3\mathrm{i}$

6) 3

7) $-\mathrm{i}$

8) $2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$