Nom:	Prénom:	Note:

Contexte général

Une start-up conçoit un système de capteurs connectés pour surveiller la température dans des serveurs informatiques. Le TP porte sur l'analyse de la réponse d'un capteur (Partie 1), la gestion des alertes stockées en base de données (Partie 2) et la fiabilité des composants reçus par les fournisseurs (Partie 3).

Partie A : Analyse du système thermique

Lorsqu'un serveur s'allume, la température T (en °C) captée par la sonde en fonction du temps t (en secondes) est modélisée sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(t) = 60 - 40e^{-0,2t} \quad \text{pour } t \geq 0$$

1. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de la surveillance de la température.

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 60$$

Interprétation : Lorsque le temps t tend vers l'infini , la température T captée par la sonde tend vers 60°C. Cela signifie que le serveur atteint une température stable de 60°C après un certain temps d'allumage, ce qui est crucial pour la surveillance thermique afin d'éviter les surchauffes.

2. Calculer $f'(t)$.

$$f'(t) = 0 - 40 \times (-0,2)e^{-0,2t} = 8e^{-0,2t}$$

3. Étudier le signe de $f'(t)$ et en déduire les variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$. Vous présenterez les résultats dans un tableau.

Le signe de $f'(t)$ est déterminé par le signe de $e^{-0,2t}$, qui est toujours positif pour tout $t \geq 0$.
Ainsi, $f'(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$, ce qui signifie que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
signe $f'(x)$	$+$
var f	$20 \nearrow 60$

4. On considère que le système est stabilisé lorsque la température atteint 55°C.

   À l'aide de GeoGebra, déterminer graphiquement au bout de combien de temps (arrondi à l'unité) cette température est atteinte.

En utilisant GeoGebra, on peut tracer la courbe de la fonction $f(t)$ et trouver l'intersection avec la ligne horizontale $y = 55$. En observant le graphique, on trouve que la température atteint 55°C environ au bout de xxx secondes.

```
Appeler le professeur pour expliquer votre démarche
même si celle-ci est inaboutie.
```

Partie B : Gestion d'une pile de messages (Buffer)

Le système de surveillance génère des logs. Initialement, il y a **50 messages** en attente.

Chaque minute :

- Le système traite et supprime 20% des messages présents.
- 30 nouveaux messages sont générés par les capteurs.

On note u_n le nombre de messages à la minute n. On a $u_0 = 50$.

5. Justifier que $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 30$.

À chaque minute, le nombre de messages traités et supprimés est de 20% de u_n, soit $0{,}2u_n$. Par conséquent, le nombre de messages restant après traitement est de $u_n - 0{,}2u_n = 0{,}8u_n$. Ensuite, 30 nouveaux messages sont ajoutés, ce qui donne la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0{,}8u_n + 30$$

6. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 150$ est une suite géométrique dont on déterminera les paramètres.

Pour tout n entier naturel : $v_{n+1} = u_{n+1} - 150 = 0{,}8u_n + 30 - 150 = 0{,}8u_n - 120$
or $u_n = v_n + 150$, donc : $v_{n+1} = 0{,}8(v_n + 150) - 120 = 0{,}8v_n + 120 - 120 = 0{,}8v_n$
Ainsi, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 150 = -100$.

7. En déduire que $u_n = -100 \cdot 0{,}8^n + 150$.

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $v_0 = -100$ donc pour tout n entier naturel :

$$v_n = v_0 \cdot q^n = -100 \cdot 0{,}8^n \qquad \text{or pour tout } n \text{ entier naturel : } u_n = v_n + 150 = -100 \cdot 0{,}8^n + 150$$

8. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de la gestion des messages.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (-100 \cdot 0{,}8^n + 150) = 150$$

Interprétation : Lorsque n tend vers l'infini, le nombre de messages en attente u_n tend vers 150.

9. On souhaite savoir quand la pile dépassera 140 messages en attente. Compléter l'algorithme suivant pour trouver la minute à laquelle cela se produit.

```
n <- ......
u <- ......
Tant que ........... faire
    u <- ...........
    n <- ...........
Fin Tant que
Afficher n
```

```
n <- 0
u <- 50
Tant que u > 140 faire
    u <- 0,8 * u + 30
    n <- n + 1
Fin Tant que
Afficher n
```

Partie C : Contrôle de fiabilité des capteurs

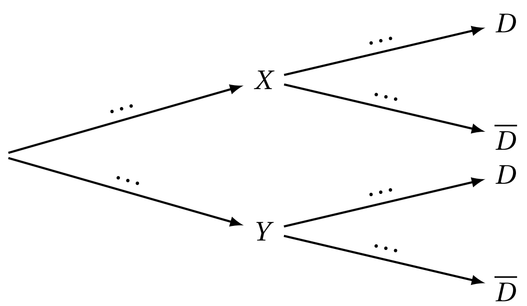
L'entreprise reçoit des capteurs de deux fournisseurs différents. Chaque capteur peut être défectueux ou non.

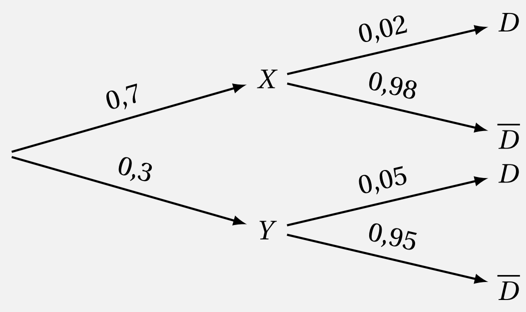
- Fournisseur X : fournit 70% du stock (avec un taux de défectueux de 2%).
- Fournisseur Y : fournit 30% du stock (avec un taux de défectueux de 5%).

On tire un capteur au hasard dans le stock global. Soient les événements :

- X : « Le capteur provient du fournisseur X »
- Y : « Le capteur provient du fournisseur Y »
- D : « Le capteur est défectueux »

10. Construire un arbre pondéré modélisant cette situation.





11. Calculer la probabilité que le capteur prélevé soit défectueux $P(D)$.

$$P(D) = P(X)\cdot P_X(D) + P(Y)\cdot P_Y(D) = 0{,}7\cdot 0{,}02 + 0{,}3\cdot 0{,}05 = 0{,}014 + 0{,}015 = 0{,}029$$

12. Le capteur tiré est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne du fournisseur Y. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

$$P_Y(D) = \frac{P(Y\cap D)}{P(D)} = \frac{P(Y)\cdot P_Y(D)}{P(D)} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}05}{0{,}029} = \frac{0{,}015}{0{,}029} \approx 0{,}517$$

Partie D : Loi binomiale

On prélève désormais, de manière indépendante, un lot de **50 capteurs**. On considère que la probabilité qu'un capteur soit défectueux est $p = 0{,}029$ (valeur arrondie). Soit Z la variable aléatoire comptant le nombre de capteurs défectueux dans ce lot.

13. Justifier que Z suit une loi binomiale et préciser ses paramètres n et p.

La variable aléatoire Z suit une loi binomiale car elle compte le nombre de succès (capteurs défectueux) dans un nombre fixe d'essais indépendants (50 capteurs), avec une probabilité constante de succès $p = 0{,}029$. Les paramètres de la loi binomiale sont donc $n = 50$ et $p = 0{,}029$.

14. Déterminer la probabilité d'avoir exactement 2 capteurs défectueux dans le lot : $P(Z = 2)$.

$$P(Z = 2) \approx$$

15. Déterminer la probabilité d'avoir entre 2 et 4 capteurs défectueux dans le lot : $P(2 \leq Z \leq 4)$.

$$P(2 \leq Z \leq 4) =$$

16. Calculer la probabilité d'avoir au moins 1 capteur défectueux : $P(Z \geq 1)$.

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - \binom{50}{0} p^0 (1-p)^{50} = 1 - 1 \cdot 0{,}029^0 \cdot 0{,}971^{50} =$$

Partie E : Détermination d'une taille d'échantillon

Le responsable qualité souhaite que la probabilité de détecter au moins un capteur défectueux dans un lot de n capteurs soit supérieure à 0,95. On rappelle que la probabilité qu'un capteur soit défectueux est $p = 0{,}029$.

17. Montrer que la condition $P(Z \geq 1) > 0{,}95$ est équivalente à l'inéquation : $(0{,}971)^n < 0{,}05$.

La probabilité de détecter au moins un capteur défectueux est donnée par :

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - (1-p)^n = 1 - (0{,}971)^n$$

Ainsi, la condition $P(Z \geq 1) > 0{,}95$ est équivalente à :

$$1 - (0{,}971)^n > 0{,}95 \quad \Leftrightarrow \quad (0{,}971)^n < 0{,}05$$

18. Déterminer le nombre minimal n de capteurs que le responsable doit prélever pour respecter cette exigence.

Pour que la condition $P(Z \geq 1) > 0{,}95$ soit vérifiée, il faut que $(0{,}971)^n < 0{,}05$. En utilisant l'outil « Calcul de probabilités » de GeoGébra, on peut trouver le plus petit entier n tel que cette inéquation soit vérifiée. En testant différentes valeurs de n, on trouve que le nombre minimal de capteurs à prélever est $n = 100$.

Appeler le professeur pour expliquer votre démarche
même si celle-ci est inaboutie.