Nom: | Prénom: | Note:

Contexte général

En télécommunications, le gain d'un amplificateur peut varier selon la tension de commande. On modélise le gain G (en décibels) en fonction de la tension x (en volts) sur l'intervalle $[1;10]$ par : $f(x) = a \cdot \ln(x) + b \cdot x$

Partie A : Configuration de l'amplificateur

Avant d'étudier le signal, le technicien doit configurer l'amplificateur pour qu'il réponde à deux contraintes techniques :

- Pour une tension de référence ($x = 1$ V), le gain doit être exactement de 5 dB.
- Pour stabiliser le signal, le gain doit atteindre son minimum pour une tension de 4 V.

1. Exprimer les deux contraintes ci-dessus en termes d'équations impliquant les paramètres a et b.

$$f(1) = 5 \qquad \text{et} \qquad f'(4) = 0$$

2. Sur Géogébra, créer deux curseurs pour les paramètres a (allant de -50 à 0) et b (allant de 0 à 20).
3. Créer la fonction f définie sur $[1;10]$ par $f(x) = a \cdot \ln(x) + b \cdot x$
4. En manipulant les curseurs, trouver les valeurs entières de a et b permettant de vérifier les deux contraintes citées plus haut.

on trouve que les valeurs entières de a et b qui vérifient les contraintes sont $a = -20$ et $b = 5$.

```
Appeler le professeur pour expliquer votre démarche
même si celle-ci est inaboutie.
```

Partie B : Étude de la fonction de Gain

Pour la suite, on admet que les paramètres sont fixés à $a = -20$ et $b = 5$. On a donc : $f(x) = -20 \cdot \ln(x) + 5x$

5. Calculer la valeur exacte de $f(1)$.

$$f(1) = -20 \cdot \ln(1) + 5 \cdot 1 = 5$$

6. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} de $f(10)$.

$$f(10) \approx -20 \cdot \ln(10) + 5 \cdot 10 \approx 15{,}05$$

7. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est négative.

En utilisant Géogébra, on trouve que la fonction f est négative sur l'intervalle $[x;x[$.

8. Calculer la dérivée $f'(x)$ sur l'intervalle $[1;10]$.

$$f'(x) = -20 \cdot \frac{1}{x} + 5 = \frac{5x - 20}{x}$$

Tourner la page

9. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[1;10]$ et dresser le tableau de variations complet de f.

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $5x-20$. On trouve que $f'(x)<0$ pour $x<4$ et $f'(x)>0$ pour $x>4$. Ainsi, la fonction f est décroissante sur $[1;4]$ et croissante sur $[4;10]$. Le tableau de variations est donc :

x	1		4		10
signe $f'(x)$		$-$	0	$+$	
var f	5	↘	$f(4)$	↗	15,05

Partie C : Calcul de la Puissance Moyenne

10. Déterminer une primitive F de la fonction f sur $[1;10]$.

$$F(x) = -20\cdot\left(x\ln(x)-x\right)+5\cdot x$$

11. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_1^5 f(x)\,dx$.

$$I = F(5)-F(1) = \left[-20\cdot\left(5\ln(5)-5\right)+5\cdot 5\right]-\left[-20\cdot\left(1\ln(1)-1\right)+5\cdot 1\right]\approx$$

12. Calculer la valeur moyenne G_m du gain sur l'intervalle $[1;5]$ (arrondir au dixième).

$$G_m = \frac{1}{5-1}\int_1^5 f(x)\,dx = \frac{1}{4}\cdot I \approx$$

Partie D : Contrôle qualité et probabilités conditionnelles

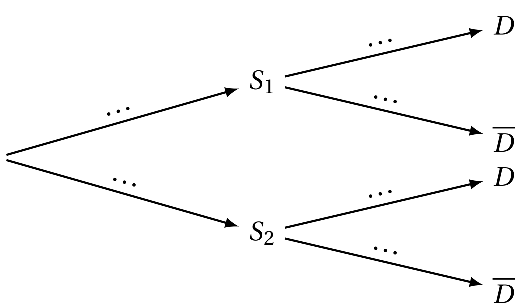
L'entreprise reçoit des puces d'amplification de deux fournisseurs différents. Chaque puce peut être défectueuse ou non.

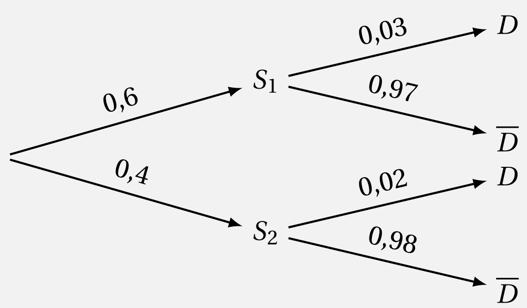
- Fournisseur S_1 : fournit 60% du stock (avec un taux de défectueux de 3%).
- Fournisseur S_2 : fournit le reste du stock (40%) avec un taux de défectueux de 2%.

On tire une puce au hasard dans le stock global. Soient les événements :

- S_1 : « La puce provient du fournisseur S_1 »
- S_2 : « La puce provient du fournisseur S_2 »
- D : « La puce est défectueuse »

13. Construire un arbre pondéré modélisant cette situation.





14. Calculer la probabilité que la puce prélevée soit défectueuse.

$$P(D) = P(S_1) \cdot P_{S_1}(D) + P(S_2) \cdot P_{S_2}(D) = 0{,}6 \cdot 0{,}03 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 = 0{,}018 + 0{,}008 = 0{,}026$$

15. La puce tirée est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne du fournisseur S_1. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

$$P_{S_1}(D) = \frac{P(S_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(S_1) \cdot P_{S_1}(D)}{P(D)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}03}{0{,}026} = \frac{0{,}018}{0{,}026} \approx 0{,}692$$

Partie E : Fiabilité et seuil de confiance

On utilise des composants dont la probabilité de défaut est $p = 0{,}04$. On prélève un lot de n résistances.

16. Pour un lot de $n = 80$, on admet que le nombre de défauts suit une loi binomiale. Justifier les paramètres de cette loi.

La variable aléatoire qui compte le nombre de résistances défectueuses dans un lot de n résistances suit une loi binomiale car elle compte le nombre de succès (résistances défectueuses) dans un nombre fixe d'essais indépendants (80 résistances), avec une probabilité constante de succès $p = 0{,}04$. Les paramètres de la loi binomiale sont donc $n = 80$ et $p = 0{,}04$.

17. Calculer la probabilité d'avoir au moins une résistance défectueuse $P(X \geq 1)$.

La probabilité d'avoir au moins une résistance défectueuse est complémentaire de la probabilité d'avoir aucune résistance défectueuse :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0{,}96)^{80} \approx 1 - 0{,}043 = 0{,}957$$

18. Le responsable veut que la probabilité d'avoir au moins un défaut dépasse 0,99. Trouver le nombre minimal de composants à tester pour que $P(X \geq 1) > 0{,}99$.

Pour que la probabilité d'avoir au moins un défaut dépasse 0,99, il faut que :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) > 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 0) < 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad (0{,}96)^n < 0{,}01$$

En prenant le logarithme des deux côtés, on trouve :

$$n \cdot \ln(0{,}96) < \ln(0{,}01) \quad \Leftrightarrow \quad n < \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}96)} \approx \frac{-4{,}605}{-0{,}0408} \approx 112{,}9$$

Donc, le nombre minimal de composants à tester pour que $P(X \geq 1) > 0{,}99$ est de $n = 113$.

```
Appeler le professeur pour expliquer votre démarche
même si celle-ci est inaboutie.
```