

Nom:

Prénom:

Un ordinateur doté d'un tableur et du logiciel Géogebra est mis à la disposition du candidat qui pourra également se servir de sa calculatrice scientifique.

Aucun document n'est autorisé.

L'usage du téléphone est interdit.

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4 et est constitué de 3 parties indépendantes ainsi que de deux appels professeur.

Évaluation des compétences

..... / 10

Compétences évaluées	Questions	Notes
S'informer : Rechercher, extraire et organiser l'information.	 / 1
Chercher : Proposer une méthode, expérimenter, tester.	 / 2
Modéliser : Traduire un problème en langage mathématique.	 / 1
Raisonner : Déduire, induire, justifier ou démontrer.	 / 2
Calculer : Calculer, illustrer, programmer, mettre en œuvre.	 / 2
Communiquer : Rendre compte d'une démarche à l'oral ou à l'écrit.	 / 2

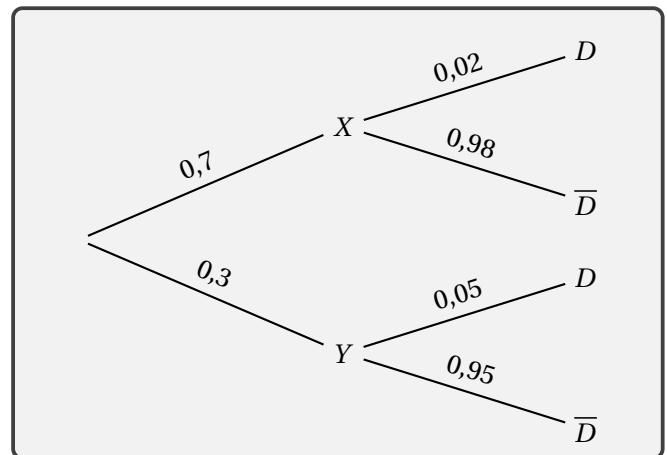
PARTIE A – Fiabilité des capteurs (Probabilités)

Dans cette partie, vous arrondirez toutes les valeurs à 10^{-4} si nécessaire.

Une entreprise installe des capteurs de température. Elle se fournit chez deux fabricants :

- Fabricant X : fournit 70% des capteurs, avec un taux de défaillance de 2%.
- Fabricant Y : fournit 30% des capteurs, avec un taux de défaillance de 5%.

On note D l'événement « le capteur est défectueux », X l'événement « le capteur provient du fabricant X » et Y l'événement « le capteur provient du fabricant Y ». Un capteur est prélevé au hasard en sortie de chaîne.



1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre.
2. Calculer la probabilité que le capteur soit défectueux et provienne du fabricant X.

$$P(X \cap D) = P(X) \times P_D(X) = 0,7 \times 0,02 = 0,014$$

La probabilité que le capteur soit défectueux et provienne du fabricant X est de 0,014.

3. Calculer la probabilité que le module prélevé soit défectueux. Montrer que cette probabilité est égale à 0,029.

$$P(D) = P(X \cap D) + P(Y \cap D) = P(X) \times P_D(X) + P(Y) \times P_D(Y) = 0,7 \times 0,02 + 0,3 \times 0,05 = 0,029$$

La probabilité que le capteur soit défectueux est de 0,029.

4. Sachant que le capteur est défectueux, calculer la probabilité qu'il provienne du fabricant X.

$$P_X(D) = \frac{P(X \cap D)}{P(D)} = \frac{P(X) \times P_D(X)}{P(D)} = \frac{0,7 \times 0,02}{0,029} \approx 0,4828$$

La probabilité que le capteur provienne du fabricant X sachant qu'il est défectueux est d'environ 0,4828.

5. On installe un lot de 50 capteurs de manière indépendante. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de capteurs défectueux. Quelles sont les paramètres de la loi binomiale suivie par X ?

Les paramètres de la loi binomiale suivie par X sont $n = 50$ et $p = 0,029$.

6. Déterminer la probabilité d'avoir au moins 3 capteurs défectueux dans ce lot.

$$P(X \geq 3) = 0,1767$$

7. On souhaite savoir à partir de combien de capteurs piochés, la probabilité d'avoir au moins 1 capteurs défectueux soit supérieure à 10%. Déterminer à l'aide de Géogébra à partir de quelle valeur de n la condition est satisfaite.

$$n = 4$$



Appeler le professeur pour expliquer votre démarche même si celle-ci est inaboutie.

PARTIE B – Étude d’un signal de commande (Analyse)

La tension de commande d’un servomoteur est modélisée par la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(t) = (at + b) \cdot e^{-0,2t} \quad \text{où } a, b \text{ sont des constantes réelles}$$

t est le temps en millisecondes (ms) et $g(t)$ est la tension en volts (V) à l’instant t .

Etude d’un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on donne $a = 0$ et $b = 12$. Ainsi la fonction g s’exprime par : $g(t) = 12 \cdot e^{-0,2t}$.

8. Déterminer par le calcul une expression de la fonction dérivée g' et montrer que $g'(t) = -2,4 \cdot e^{-0,2t}$.

$$g(t) = 12 \cdot e^{-0,2t}$$
$$g'(t) = 12 \cdot (-0,2 \cdot e^{-0,2t}) = -2,4 \cdot e^{-0,2t}.$$

9. En déduire les variations de g sur $[0; +\infty[$.

$g'(t)$ est strictement négatif sur $[0; +\infty[$, ainsi g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

Modélisation

Dans cette partie, on considère que a et b sont des constantes réelles strictement positives, mais on ne connaît pas leurs valeurs.

Des études expérimentales ont permis de déterminer que :

- la tension initiale $g(0)$ est de 2 volts;
- la tension atteint un maximum au bout de 4 ms.

La fonction g est donc définie pour tout $t \geq 0$ par $g(t) = (at + b) \cdot e^{-0,2t}$

10. Al’aide des deux conditions expérimentales et à l’aide de Géogébra, déterminer les valeurs de a et b .

$$a = 2 \qquad b = 2$$



Appeler le professeur pour expliquer votre démarche même si celle-ci est inaboutie.

Dans la suite de l’exercice on considèrera la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = 2(t + 1) \cdot e^{-0,2t}$.

11. Déterminer grâce à Géogébra à partir de quelle valeur de t la tension $g(t)$ devient inférieure à 0,5 volt. (On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.)

$$t \approx 22,77 \text{ ms.}$$

12. Calculer l’énergie totale dissipée $E = \int_0^{10} g(t) dt$ entre $t = 0$ et $t = 10$ sachant qu’une primitive de g est donnée par $G(t) = -10(t + 6) \cdot e^{-0,2t}$.

L’énergie totale dissipée entre $t = 0$ et $t = 10$ est $E = G(10) - G(0) = \dots\dots\dots 38,35$ joules.

PARTIE C – Débit d'une liaison satellite (Suites)

Lors d'un orage, le débit d'une antenne chute progressivement. Initialement, le débit est de 100 Mbit/s. À chaque seconde, le signal perd 15% de sa puissance.

Soit v_n le débit après n secondes.

13. Justifier que la suite (v_n) vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = 0,85 \cdot v_n$.

La suite (v_n) vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = 0,85 \cdot v_n$ car à chaque seconde, le signal perd 15% de sa puissance.

On a donc $v_{n+1} = v_n - 0,15 \cdot v_n = 0,85 \cdot v_n$.

14. Déterminer la nature de la suite (v_n) .

La suite (v_n) est de la forme $v_{n+1} = q \times v_n$ avec $q = 0,85$ constant, donc c'est une suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme $v_0 = 100$.

15. Exprimer v_n en fonction de n .

(v_n) est une suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme $v_0 = 100$, donc pour tout n entier naturel, on a $v_n = v_0 \times q^n = 100 \times 0,85^n$.

16. Compléter l'algorithme ci-dessous qui calcule le nombre de cycles d'horloges nécessaires pour que la quantité de données dans le buffer soit inférieure à 10 Mbit/s.

Algorithme de recherche de seuil

```
n ← 0
v ← 100
tant que v >= 10 :
    v ← 0,85 * v
    n ← n + 1
print(n)
```