PARTIE A – Fiabilité d'un parc de passerelles LoRaWAN (Probabilités)

Dans cette partie, vous arrondirez toutes les valeurs à 10^{-4} *si nécessaire.*

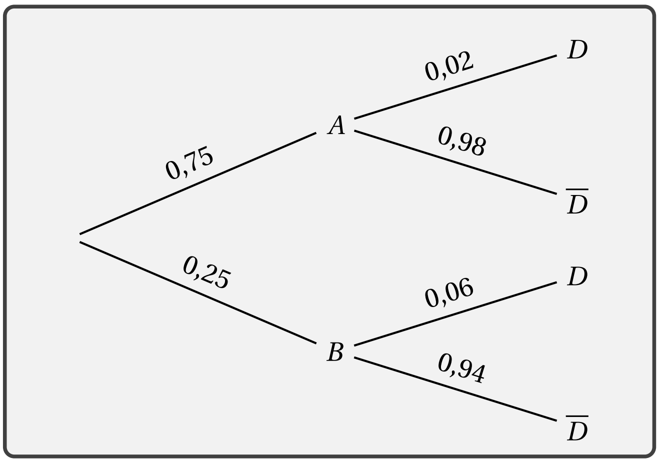
le stock est composé de :

- 75% de passerelles de type **Alpha** dont 2% présentent un défaut de synchronisation.
- 25% de passerelles de type **Beta** dont 6% présentent un défaut de synchronisation.

On note

- D l'événement « la passerelle est défectueuse ».
- A l'événement « la passerelle est de type Alpha ».
- B l'événement « la passerelle est de type Beta ».

Une passerelle est prélevée au hasard en sortie de chaîne.



1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

2. Calculer la probabilité que la passerelle prélevée soit défectueuse et soit de type **Alpha**.

   $P(A \cap D) = P(A) \times P_D(A) = 0{,}75 \times 0{,}02 = 0{,}015$
   La probabilité que la passerelle soit défectueuse et soit de type **Alpha** est de 0,015.

3. Calculer la probabilité que la passerelle prélevée soit défectueuse.

   $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = P(A) \times P_D(A) + P(B) \times P_D(B) = 0{,}75 \times 0{,}02 + 0{,}25 \times 0{,}06 = 0{,}03$
   La probabilité que la passerelle soit défectueuse est de 0,03.

4. Sachant que la passerelle est défectueuse, calculer la probabilité qu'elle soit de type **Alpha**.

   $P_A(D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(A) \times P_D(A)}{P(D)} = \dfrac{0{,}75 \times 0{,}02}{0{,}03} \approx 0{,}5$
   La probabilité que la passerelle soit de type **Alpha** sachant qu'elle est défectueuse est 0,5.

5. On prélève un lot de 30 passerelles de manière indépendante. Soit Y la variable aléatoire comptant le nombre de passerelles défectueuses. Démontrer que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   - "choisir une passerelle défectueuse" est une expérience à deux issues : "la passerelle est défectueuse" de $p = 0{,}03$ et "la passerelle n'est pas défectueuse" de $p = 0{,}97$
   - On répète cette expérience $n = 30$ fois de manière identique et indépendante
   - Y compte le nombre de succès (passerelles défectueuses) parmi les 30 expériences
   - Donc Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}03$.

6. Calculer la probabilité d'avoir au moins 2 passerelles défectueuses dans ce lot.

   $P(Y \geq 2) \approx 0{,}2269$
   La probabilité d'avoir au moins 2 passerelles défectueuses dans ce lot est d'environ 0,2269.

Tourner la page

7. Calculer la probabilité d'avoir exactement 3 passerelles défectueuses dans ce lot.

> $P(Y=3) \approx 0{,}0447$
> La probabilité d'avoir exactement 3 passerelles défectueuses dans ce lot est d'environ 0,0482.

8. Combien faut-il prélever de passerelles pour que la probabilité d'avoir au moins 1 passerelle défectueuse soit supérieure à 20%? Déterminer à l'aide de Géogébra à partir de quelle valeur de n la condition est satisfaite.

> $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}03^0 \times (1-0{,}03)^n = 1 - (1-0{,}03)^n = 1 - 0{,}97^n$
> Il faut prélever au moins 8 passerelles pour que la probabilité d'en avoir au moins 1 défectueuse soit supérieure à 20%.

PARTIE B – Étude de l'attenuation d'un signal audio (Fonctions)

Pour protéger les composants d'un amplificateur, on étudie le gain f d'un circuit de filtrage en fonction de la fréquence x (en kHz). On considère la fonction f définie sur $[1;20]$ par :

$\boxed{f(x) = ax - b\ln(x)}$ $f(x)$ représente le gain en dB pour une fréquence x. a et b sont des constantes réelles.

- Le gain est minimal pour une fréquence de 2 kHz
- Le gain pour une fréquence de 1 kHz est de 5 dB.

9. Déterminer à l'aide de Géogébra les valeurs de a et b.

> $a = 5$ et $b = 10$

On décide de modéliser le gain par la fonction f définie sur $[1;20]$ par $\boxed{f(x) = 5(x - 2\ln(x))}$

10. Calculer $f'(x)$

> $$f'(x) = 5\left(1 - \frac{2}{x}\right) = 5 - \frac{10}{x} = \frac{5x-10}{x}$$

11. En déduire les variations de f sur $[1;20]$.

> $f'(x)$ est strictement négative sur $[1;2]$, ainsi f est strictement décroissante sur $[1;2]$.
> $f'(x)$ est strictement positive sur $[2;20]$, ainsi f est strictement croissante sur $[2;20]$.

12. On considère que le signal est "coupé" lorsque le gain devient inférieur à 3,5 dB. Déterminer à l'aide de Géogébra pour quelles fréquences le signal est coupé.

> Le signal est coupé sur $[1{,}47;2{,}65]$

13. Déterminer une primitive F de la foncton f.

> $$F(x) = \frac{5}{2}x^2 - 10(x\ln(x) - x)$$

14. Calculer le gain moyen du circuit sur la plage de fréquence $[1;3]$ arrondi à 10^{-2} près.

> Le gain moyen du circuit sur la plage de fréquence $[1;3]$ est de $\frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)\,dx \approx 3{,}52$ dB.

PARTIE C – Décharge d'une batterie de secours (Suites)

Lors d'une coupure de courant, une batterie de secours alimente un serveur. Sa capacité initiale est de 800 Wh. Chaque heure, elle perd 12% de l'énergie qu'il lui reste.

Soit u_n l'énergie restante (en Wh) après n heures.

15. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = 0{,}88 \cdot u_n$.

La suite (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = 0{,}88 \cdot u_n$ car à chaque heure, la batterie perd 12% de l'énergie qu'elle lui reste.
On a donc $u_{n+1} = u_n - 0{,}12 \cdot u_n = 0{,}88 \cdot u_n$.

16. Déterminer la nature de la suite (u_n).

La suite (u_n) est de la forme $u_{n+1} = q \times u_n$ avec $q = 0{,}88$ constant, donc c'est une suite géométrique de raison 0,88 et de premier terme $u_0 = 800$.

17. Exprimer u_n en fonction de n.

(u_n) est une SG de raison 0,88 et de premier terme $u_0 = 800$, donc pour tout n entier naturel, on a $u_n = u_0 \times q^n = 800 \times 0{,}88^n$.

18. Compléter le script suivant pour déterminer après combien d'heures l'énergie sera inférieure à 100 Wh.

Algorithme de recherche de seuil

```
n ← 0
u ← 800
tant que u >= 100:
        u ← 0,88 *u
        n ← n + 1
afficher (n)
```

19. Déterminer par la méthode de votre choix après combien d'heures l'énergie sera inférieure à 100 Wh.

On cherche à déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 100$. On trouve $n = 17$ donc après 17 heures, l'énergie sera inférieure à 100 Wh.

Tourner la page

PARTIE D : Pour aller plus loin

Comparaison de deux modèles de décharge

Une autre batterie (Modèle Gamma) suit une décharge linéaire. Sa capacité initiale est de 800 Wh et elle perd 60 Wh chaque heure.

20. Déterminer l'énergie restante après n heures pour ce modèle de batterie.

> (w_n) est une suite définie par $w_n = 800 - 60n$ pour tout entier naturel n.

21. Déterminer après combien d'heures l'énergie de ce modèle de batterie sera inférieure à 100 Wh.

> On cherche à déterminer le plus petit entier naturel n tel que $w_n < 100$. On a $w_n = 800 - 60n < 100 \Leftrightarrow 60n > 700 \Leftrightarrow n > 11{,}67$. Ainsi, après 12 heures, l'énergie de cette batterie sera inférieure à 100 Wh.

22. Déterminer à l'aide de Géogébra à partir de quelle heure le modèle Gamma devient moins avantageux que le modèle de la partie C.

> Le modèle Gamma devient moins avantageux que le modèle de la partie C à partir de la 10ème heure.

Analyse de performance

On étudie le temps de latence $L(n)$ d'un réseau en fonction du nombre n de paquets envoyés, modélisé par : $L(n) = 20 \times (1 - \mathrm{e}^{-0{,}1n})$

23. Déterminer la limite de $L(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

> La limite de $L(n)$ quand n tend vers $+\infty$ est égale à 20 ms.

On considère que le réseau est saturé quand la latence dépasse 95% de sa valeur limite.

24. Déterminer à partir de quel nombre de paquets n le réseau est considéré comme saturé.

> $L(n) > 19 \Leftrightarrow n > 29{,}96$. Ainsi, le réseau est considéré comme saturé à partir de 30 paquets envoyés.

Etude du régime transitoire

La tension $u(t)$ au bornes de la batterie de secours à l'instant t (en heures) est modélisée par la fonction u définie sur $[0;+\infty]$ qui est solution de l'équation : $\boxed{u'(t) + 0{,}5u(t) = 10}$

On suppose que $u(t)$ est de la forme $u(t) = e^{kt} + C$ où k et C sont des constantes réelles.

25. Tracer la courbe représentative de u sur géogébra.
26. Tracer la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0;+\infty]$ par $g(t) = u'(t) + 0{,}5u(t)$ sur géogébra.
27. Déterminer les valeurs de k et C afin que $g(t) = 10$ pour tout t de $[0;+\infty]$.

> $u(t) = e^{kt} + C$ est solution de l'équation différentielle $u'(t) + 0{,}5u(t) = 10$ si $k = -0{,}5$ et $C = 20$ car $u'(t) = ke^{kt}$ et $u'(t) + 0{,}5u(t) = ke^{kt} + 0{,}5(e^{kt} + C) = (k + 0{,}5)e^{kt} + 0{,}5C = 10$ si $k = -0{,}5$ et $C = 20$.