

PARTIE A – Fiabilité d'un parc de passerelles LoRaWAN (Probabilités)

Dans cette partie, vous arrondirez toutes les valeurs à 10^{-4} si nécessaire.

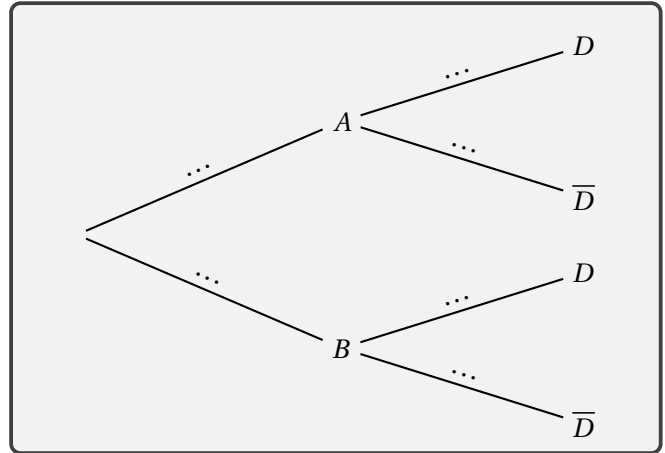
le stock est composé de :

- 75% de passerelles de type **Alpha** dont 2% présentent un défaut de synchronisation.
- 25% de passerelles de type **Beta** dont 6% présentent un défaut de synchronisation.

On note

- D l'événement « la passerelle est défectueuse ».
- A l'événement « la passerelle est de type Alpha ».
- B l'événement « la passerelle est de type Beta ».

Une passerelle est prélevée au hasard en sortie de chaîne.



1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre.
2. Calculer la probabilité que la passerelle prélevée soit défectueuse et soit de type **Alpha**.

3. Calculer la probabilité que la passerelle prélevée soit défectueuse.

4. Sachant que la passerelle est défectueuse, calculer la probabilité qu'elle soit de type **Alpha**.

5. On prélève un lot de 30 passerelles de manière indépendante. Soit Y la variable aléatoire comptant le nombre de passerelles défectueuses. Démontrer que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

6. Calculer la probabilité d'avoir au moins 2 passerelles défectueuses dans ce lot.

7. Calculer la probabilité d'avoir exactement 3 passerelles défectueuses dans ce lot.

8. Combien faut-il prélever de passerelles pour que la probabilité d'avoir au moins 1 passerelle défectueuse soit supérieure à 20%? Déterminer à l'aide de Géogebra à partir de quelle valeur de n la condition est satisfaite.

PARTIE B – Étude de l'atténuation d'un signal audio (Fonctions)

Pour protéger les composants d'un amplificateur, on étudie le gain f d'un circuit de filtrage en fonction de la fréquence x (en kHz). On considère la fonction f définie sur $[1; 20]$ par :

$f(x) = ax - b \ln(x)$ $f(x)$ représente le gain en dB pour une fréquence x . a et b sont des constantes réelles.

- Le gain est minimal pour une fréquence de 2 kHz
- Le gain pour une fréquence de 1 kHz est de 5 dB.

9. Déterminer à l'aide de Géogebra les valeurs de a et b .

On décide de modéliser le gain par la fonction f définie sur $[1; 20]$ par $f(x) = 5(x - 2 \ln(x))$

10. Calculer $f'(x)$

11. En déduire les variations de f sur $[1; 20]$.

12. On considère que le signal est "coupé" lorsque le gain devient inférieur à 3,5 dB. Déterminer à l'aide de Géogebra pour quelles fréquences le signal est coupé.

13. Déterminer une primitive F de la fonction f .

14. Calculer le gain moyen du circuit sur la plage de fréquence $[1; 3]$ arrondi à 10^{-2} près.

PARTIE C – Décharge d'une batterie de secours (Suites)

Lors d'une coupure de courant, une batterie de secours alimente un serveur. Sa capacité initiale est de 800 Wh. Chaque heure, elle perd 12% de l'énergie qu'il lui reste.

Soit u_n l'énergie restante (en Wh) après n heures.

15. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = 0,88 \cdot u_n$.

16. Déterminer la nature de la suite (u_n) .

17. Exprimer u_n en fonction de n .

18. Compléter le script suivant pour déterminer après combien d'heures l'énergie sera inférieure à 100 Wh.

Algorithme de recherche de seuil

```
n ← 0
u ← 800
tant que .....:
    u ← .....
    n ← .....
afficher (n)
```

19. Déterminer par la méthode de votre choix après combien d'heures l'énergie sera inférieure à 100 Wh.

PARTIE D : Pour aller plus loin

Comparaison de deux modèles de décharge

Une autre batterie (Modèle Gamma) suit une décharge linéaire. Sa capacité initiale est de 800 Wh et elle perd 60 Wh chaque heure.

20. Déterminer l'énergie restante après n heures pour ce modèle de batterie.

21. Déterminer après combien d'heures l'énergie de ce modèle de batterie sera inférieure à 100 Wh.

22. Déterminer à l'aide de Géogébra à partir de quelle heure le modèle Gamma devient moins avantageux que le modèle de la partie C.

Analyse de performance

On étudie le temps de latence $L(n)$ d'un réseau en fonction du nombre n de paquets envoyés, modélisé par :
 $L(n) = 20 \times (1 - e^{-0,1n})$

23. Déterminer la limite de $L(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

On considère que le réseau est saturé quand la latence dépasse 95% de sa valeur limite.

24. Déterminer à partir de quel nombre de paquets n le réseau est considéré comme saturé.

Etude du régime transitoire

La tension $u(t)$ au bornes de la batterie de secours à l'instant t (en heures) est modélisée par la fonction u définie sur $[0; +\infty]$ qui est solution de l'équation : $u'(t) + 0,5u(t) = 10$

On suppose que $u(t)$ est de la forme $u(t) = e^{kt} + C$ où k et C sont des constantes réelles.

25. Tracer la courbe représentative de u sur géogébra.
 26. Tracer la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0; +\infty]$ par $g(t) = u'(t) + 0,5u(t)$ sur géogébra.
 27. Déterminer les valeurs de k et C afin que $g(t) = 10$ pour tout t de $[0; +\infty]$.