BTS 1ère Année Spécialité CIEL	Lycée Victor Hugo – COLOMIERS CCF Mathématiques. Epreuve E3 – Sous épreuve U31	Lundi 13 avril 2026 Durée 55 min

Nom:	Prénom:

Un ordinateur doté d'un tableur et du logiciel Géogébra est mis à la disposition du candidat qui pourra également se servir de sa calculette scientifique.

Aucun document n'est autorisé.

L'usage du téléphone est interdit.

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4 et est constitué de 3 parties indépendantes ainsi que de deux appels professeur.

Évaluation des compétences .... / 10

Compétences évaluées	**Questions**	**Notes**
S'informer : Rechercher, extraire et organiser l'information.	Q1, Q6, Q11, Q17	...... / 1
Chercher : Proposer une méthode, expérimenter, tester.	Q2, Q3, Q9, Q10, Q15	...... / 2
Modéliser : Traduire un problème en langage mathématique.	Q1, Q3, Q6, Q9, Q12	...... / 1
Raisonner : Déduire, induire, justifier ou démontrer.	Q4, Q6, Q7, Q14	...... / 2
Calculer : Calculer, illustrer, programmer, mettre en œuvre.	Q2, Q5, Q8, Q13, Q16	...... / 2
Communiquer : Rendre compte d'une démarche à l'oral ou à l'écrit.	Q1, Q10, Q11, Q13	...... / 2

Dans ce sujet, vous arrondirez toutes les valeurs à 10^{-4} si nécessaire.

PARTIE A – Etude d'une batterie de secours (Fonctions)

Lors d'une coupure de courant, la capacité restante $f(t)$ (en Wh) d'une batterie de secours en fonction du temps t (en heures) est modélisée par :

$\boxed{f(t) = (at+b)\mathrm{e}^{-t}}$ $f(t)$ représente la capacité restante en Wh après t heures. a et b sont des constantes réelles.

On constate que :

- Au début de la coupure de courant, la capacité de la batterie de secours est de $\boxed{120 \text{ Wh}}$.
- La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 coupe l'axe des abscisses au point $\boxed{(1.2\,;0)}$.

1. En utilisant les informations données dans l'énoncé, déterminer à l'aide de Géogébra les valeurs de a et b.

   $a = 20$ et $b = 120$

Appeler le professeur pour expliquer votre démarche même si celle-ci est inaboutie.

Dans la suite de l'exercice, on considère que $\boxed{f(t) = 20(t+6)\mathrm{e}^{-t}}$ et que la fonction dérivée de f est de la forme $\boxed{f'(t) = -20(t+5)\mathrm{e}^{-t}}$.

2. Etudier les variations de f sur $[0\,;+\infty]$.

   $f'(t)$ est strictement négative sur $[0\,;+\infty]$, ainsi f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty]$.

3. On considère que la situation est critique lorsque la capacité de la batterie de secours est inférieure à $\boxed{20 \text{ Wh}}$. Déterminer à l'aide de Géogébra à partir de combien d'heures (arrondi à 10^{-4}) la situation devient critique.

   La situation est critique sur à partir de 2,0907 heures.

On suppose qu'une primitive de f est donnée par $\boxed{F(t) = -20(t+7)\mathrm{e}^{-t}}$

4. Quelle formule permettrait de calculer la capacité moyenne de la batterie de secours sur l'intervalle $[0\,;5]$?

   ☐ $\frac{1}{5}\big(F(0)-F(5)\big)$ ✔ $\frac{1}{5}\big(F(5)-F(0)\big)$ ☐ $\frac{1}{5}\big(f(5)-f(0)\big)$ ☐ $\frac{1}{5}\big(f(0)-f(5)\big)$

5. Calculer alors la capacité moyenne de la batterie de secours sur $[0\,;5]$ arrondi à 10^{-2} près.

   La capacité moyenne de la batterie de secours sur $[0\,;5]$ est de $\frac{1}{5-0}\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \approx$ Wh.

PARTIE B – Approximation numérique et suites

On désire approximer la capacité de la batterie de secours à l'aide d'une suite numérique.

On note u_n l'énergie restante (en Wh) après n minutes. On suppose que $\boxed{u_0 = 120 \text{ Wh}}$ et que chaque minute, la batterie perd $\boxed{1{,}7\%}$ de l'énergie qu'il lui reste.

6. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence $\boxed{u_{n+1} = 0{,}983 \cdot u_n}$.

> La suite (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = 0{,}983 \cdot u_n$ car à chaque minute, la batterie perd 1,7% de l'énergie qu'elle lui reste.
> On a donc $u_{n+1} = u_n - 0{,}017 \cdot u_n = 0{,}983 \cdot u_n$.

7. Déterminer la nature de la suite (u_n). Donner son premier terme et sa raison.

> La suite (u_n) est de la forme $u_{n+1} = q \times u_n$ avec $q = 0{,}983$ constant, donc c'est une suite géométrique de raison 0,983 et de premier terme $u_0 = 120$.

8. Exprimer u_n en fonction de n.

> (u_n) est une SG de raison 0,983 et de premier terme $u_0 = 120$, donc pour tout n entier naturel, on a $u_n = u_0 \times q^n = 120 \times 0{,}983^n$.

9. Compléter le script suivant qui détermine après combien de minutes l'énergie sera inférieure à $\boxed{100 \text{ Wh}}$.

Algorithme de recherche de seuil

```
n ← 0
u ← 120
tant que u >= 100:
        u ← 0,983 *u
        n ← n + 1
afficher (n)
```

10. A l'aide de Géogébra, déterminer après combien de minutes l'énergie sera inférieure à $\boxed{100 \text{ Wh}}$.

> On trouve $n = 11$ donc après 11 minutes, l'énergie sera inférieure à 100 Wh.

Appeler le professeur pour expliquer votre démarche
même si celle-ci est inaboutie.

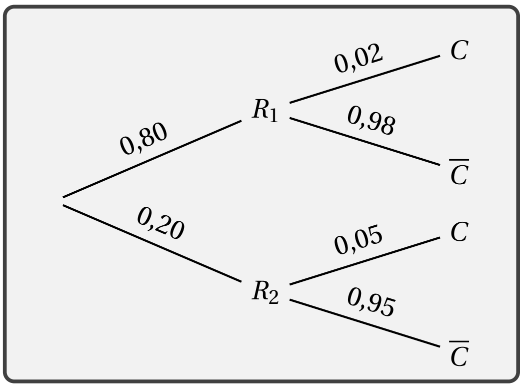
PARTIE C – Analyse de trafic et erreurs de trames

On constate que

- 80% des trames proviennent du Réseau 1.
- 20% des trames proviennent du Réseau 2.
- La probabilité qu'une trame du réseau 1 soit corrompue est de 0,02.
- La probabilité qu'une trame du réseau 2 soit corrompue est de 0,05.

On considère une trame au hasard reçue par le serveur et on note :

- C l'événement « la trame est corrompue ».
- R_1 l'événement « la trame provient du Réseau 1 ».
- R_2 l'événement « la trame provient du Réseau 2 ».



11. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre.
12. Calculer la probabilité que la trame soit corrompue et provienne du Réseau 2.

> $P(R_2 \cap C) = P(R_2) \times P_{R_2}(C) = 0{,}20 \times 0{,}05 = 0{,}01$
> La probabilité que la trame soit corrompue et provienne du Réseau 2 est de 0,01.

13. Calculer $P(C)$ et donner une interprétation à cette valeur dans le contexte de l'énoncé.

> $P(C) = P(R_1 \cap C) + P(R_2 \cap C) = P(R_1) \times P_{R_1}(C) + P(R_2) \times P_{R_2}(C) = 0{,}80 \times 0{,}02 + 0{,}20 \times 0{,}05 = 0{,}026$
> La probabilité que la trame soit corrompue est de 0,026.

14. Sachant que la trame est corrompue, calculer la probabilité qu'elle provienne du Réseau 2.

> $P_C(R_2) = \dfrac{P(R_2 \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}01}{0{,}026} \approx 0{,}3846$ La probabilité que la trame provienne du Réseau 2 sachant qu'elle est corrompue est d'environ 0,385.

Le serveur reçoit un paquet de 50 trames. On considère que les trames sont indépendantes et que la probabilité qu'une trame soit corrompue est de 0,026. On note X le nombre de trames corrompues parmi les 50 trames reçues. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}026$.

15. Déterminer la probabilité d'avoir au moins 3 trames corrompues dans ce lot.

> $P(X \geq 3) \approx 0{,}1407$. La probabilité d'avoir au moins 3 trames corrompues dans ce lot est 0,1407.

16. Par le calcul, déterminer la probabilité qu'aucune trame ne soit corrompue dans ce lot.

> $P(X = 0) = \binom{50}{0} \times 0{,}026^0 \times (1 - 0{,}026)^{50} = 0{,}974^{50} \approx 0{,}2679$
> La probabilité d'avoir exactement 0 trames corrompues dans ce lot est d'environ 0,2679.

17. De manière générale, exprimer en fonction de n la probabilité d'avoir au moins une trame corrompue dans un lot de n trames. En déduire le nombre minimum de trames à prélever pour que la probabilité d'en avoir au moins une soit supérieure à 20%.

> $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}026^0 \times (1 - 0{,}026)^n = 1 - (1 - 0{,}026)^n = 1 - 0{,}974^n$
> Il faut prélever au moins 8 trames pour que la probabilité d'en avoir au moins 1 corrompue soit supérieure à 20%.