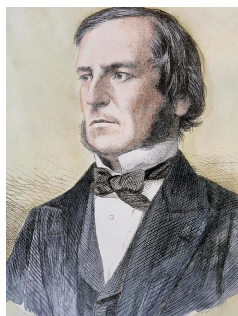


RD02

ALGÈBRE DE BOOLE



George Boole
(1815-1864)

Les machines traitent et mémorisent l'information au moyen de circuits logiques binaires : leurs entrées et sorties se caractérisent exclusivement par deux états :

- l'état logique bas
- l'état logique haut

Ceci s'explique par la technologie employée : les microprocesseurs sont constitués d'une multitude de composants électroniques que l'on appelle des transistors et qui ne peuvent prendre que deux états, bloqué ou saturé, et se comportent comme des interrupteurs.

Ce sont des circuits logiques, le plus souvent à base de transistors, qui réalisent toutes les opérations dans les processeurs des machines.

I. Variables booléennes

Définition 1 : Variable booléenne

- une variable booléenne est une variable qui ne peut prendre que deux valeurs : **vrai** ou **faux**.
- les variables booléennes sont utilisées pour modéliser des situations à deux états, par exemple : allumé/éteint, ouvert/fermé, 1/0, ...

Au sein d'une machine, la valeur booléenne est donnée par l'état d'une grandeur physique. (intensité du courant, différence de tension etc.)

II. Opérateurs booléens

Les calculs sur les variables booléennes sont réalisés à l'aide d'opérateurs logiques. Les trois opérateurs logiques de base sont :

Opérateur NON / NOT (négation)

L'opérateur NON s'applique sur un seul opérande et se note avec une barre au dessus de l'opérande. Il permet d'inverser la valeur d'une variable booléenne. Ainsi, si A est une variable booléenne, alors \bar{A} est la négation de A .

A	\bar{A}
False	True
True	False

Opérateur ET / AND (conjonction)

L'opérateur ET s'applique sur deux opérandes et se note avec un point ou une croix entre les deux opérandes. Il permet de vérifier que les deux variables booléennes sont vraies en même temps. Ainsi, si A et B sont des variables booléennes, alors $A \wedge B$ est la conjonction de A et B .

A	B	$A \cdot B$
False	False	False
False	True	False
True	False	False
True	True	True

Opérateur OU / OR (disjonction)

L'opérateur OU s'applique sur deux opérandes et se note avec un + entre les deux opérandes. Il permet de vérifier que au moins une des deux variables booléennes est vraie. Ainsi, si A et B sont des variables booléennes, alors $A + B$ est la disjonction de A et B .

A	B	$A + B$
False	False	False
False	True	True
True	False	True
True	True	True

Propriété 1 : Notations

Par abus de langage, on notera :

- 1 pour True
- 0 pour False

On peut aussi utiliser les notations suivantes pour les opérateurs logiques :

- $A \cdot B$ ou AB pour $A \wedge B$
- $A + B$ pour $A \vee B$
- \bar{A} pour $\neg A$

Exercice 1 : Montrer que l'opérateur OU peut s'écrire avec des opérateurs NON et ET

La méthode est de prouver que $A + B$ et $\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$ ont la même table de vérité.

A	B	$A + B$
False	False	False
False	True	True
True	False	True
True	True	True

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$\overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}$	$\overline{\overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}}$
False	False				
False	True				
True	False				
True	True				

Exercice 2 : Dresser la table de vérité de $A \cdot (\bar{B} + C)$

A	B	C	\bar{B}	$\bar{B} + C$	$A \cdot (\bar{B} + C)$
False	False	False			
False	False	True			
False	True	False			
False	True	True			
True	False	False			
True	False	True			
True	True	False			
True	True	True			

Opérateur OU exclusif / XOR (disjonction exclusive)

L'opérateur OU exclusif s'applique sur deux opérandes et se note avec un \oplus entre les deux opérandes. Il permet de vérifier que les deux variables booléennes sont différentes. Ainsi, si A et B sont des variables booléennes, alors $A \oplus B$ est la disjonction exclusive de A et B .

A	B	$A \oplus B$
False	False	False
False	True	True
True	False	True
True	True	False

Exercice 3 : Montrer que l'opérateur OU exclusif peut s'écrire $A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$

A	B	$A \oplus B$	$A \cdot \bar{B}$	$\bar{A} \cdot B$	$A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$
False	False				
False	True				
True	False				
True	True				

III. Propriété des opérateurs

Propriété 1 : Element neutre

- L'élément neutre de l'addition est 0 : $A + 0 = A$
- L'élément neutre de la multiplication est 1 : $A \cdot 1 = A$

Propriété 2 : Element absorbant

- L'élément absorbant de l'addition est 1 : $A + 1 = 1$
- L'élément absorbant de la multiplication est 0 : $A \cdot 0 = 0$

Propriété 3 : Elements complémentaires et incompatibles

- $A + \bar{A} = 1$
- $A \cdot \bar{A} = 0$

Propriété 4 : Loi de Morgan

- $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$
- $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$

IV. Algèbre de Boole et informatique

Les opérateurs booléens (ou logiques)

Opération	Logique	Python	C/C++/JS/PHP
FAUX	0	False	false
VRAI	1	True	true
NON	\bar{A}	not A	!A
ET	$A \cdot B$	A and B	A && B
OU	$A + B$	A or B	A B

Opérateurs booléens binaires

Opération	Logique	Python/C/C++/JS/PHP
ET bit à bit	$A \cdot B$	A & B
OU bit à bit	$A + B$	A B
XOR bit à bit	$A \oplus B$	A ^ B
NON bit à bit	\bar{A}	~A

Exercice 4 : Quelle est la valeur des expression suivantes en Python?

- True and False or True
- True or False and True
- not True
- True and not False
- False or not False